

Trabajo Fin de Máster

Máster en Automática, Robótica y Telemática

Transporte Aéreo de Carga Mediante Sistemas UAV Multirotor

Autor: Diego López Fernández

Tutores: Manuel Vargas Villanueva
Manuel Gil Ortega Linares

Dpto. Ingeniería de Sistemas y Automática
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2019



Trabajo Fin de Máster

Máster en Automática, Robótica y Telemática

Transporte Aéreo de Carga Mediante Sistemas UAV Multirotor

Autor:

Diego López Fernández

Tutores:

Manuel Vargas Villanueva

Profesor Titular

Manuel Gil Ortega Linares

Catedrático de Universidad

Dpto. Ingeniería de Sistemas y Automática

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2019

Trabajo Fin de Máster: Transporte Aéreo de Carga Mediante Sistemas UAV Multirotor

Autor: Diego López Fernández
Tutores: Manuel Vargas Villanueva
Manuel Gil Ortega Linares

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:

Agradecimientos

Mi primer agradecimiento va destinado sin duda alguna a Manuel Vargas. Quisiera agradecer la confianza y oportunidad que me concedió desde el primer momento para colaborar en distintos proyectos vanguardistas de investigación dentro del campo de la robótica y de los UAV. Gracias a ello he podido afianzar y desarrollar conocimientos no solo relacionados con este máster, sino también con la aeronáutica y la dinámica del vuelo. Destacar además su disponibilidad para ayudar en todo momento, paciencia y consejos a lo largo de todo este tiempo.

En segundo lugar agradecer a Manuel G. Ortega por su indudable contribución y consejos aportados en las dificultades encontradas, tanto en este proyecto como en la actividad desarrollada por el grupo de investigación.

También merecen un importante reconocimiento todos los integrantes del grupo de investigación de Francisco R. Rubio. Es de justicia destacar la disponibilidad, apoyo y ayuda que siempre han estado dispuestos a ofrecer, incluso si el tiempo les apremiaba.

De la misma manera, me gustaría gratificar a todas las personas que han hecho posible la ejecución de este máster. Siendo totalmente honesto, y estando a punto de finalizar este máster, se han cumplido con creces las expectativas depositadas en el mismo. He de decir que gracias a este máster se me han abierto infinidad de oportunidades laborales que anteriormente no terminaban de consolidarse.

No quisiera acabar este breve espacio sin mencionar a toda mi familia, y a mi pareja Silvia. Su apoyo y confianza han sido factores determinantes en la consecución de muchos de los retos logrados hasta el momento. Me permito la libertad de realizar una mención especial a mi madre, Rosi, y a mis abuelas, Antonia e Isabel, mostrándome su apoyo día tras día, y teniéndome en cuenta en sus oraciones incesantemente.

Por último, quisiera dedicar todo el esfuerzo realizado durante este máster a la memoria de mis abuelos Cristóbal y Diego, ejemplos en su máxima expresión de trabajo y esfuerzo, así como de humildad y respeto. Gracias por haberme transmitido tan valiosos valores, así como por las innumerables enseñanzas recibidas.

Diego López Fernández

Sevilla, 2019

Resumen

Este trabajo afronta el problema del transporte aéreo de carga colgante mediante un único UAV tipo quadrotor. Más específicamente, se continúa con la línea de investigación recientemente iniciada en donde se aborda el problema controlando directamente la posición de la carga, considerando la actitud y posición del quadrotor de manera implícita. Por un lado, este trabajo intentará mejorar los controles lineales PID y LQR ya diseñados en un proyecto previo, usando para ello distintas estrategias de control. Por otro lado, se diseñarán nuevos controles robustos lineales y no lineales y se evaluarán tomando como referencia los anteriores controles PID y LQR. El control robusto lineal será del tipo \mathcal{H}_∞ S/KS/T para el control de la altitud de la carga, y \mathcal{H}_∞ GS/T para el control de la posición horizontal de la carga dada la particularidad de este último subsistema. El control robusto no lineal será un control \mathcal{H}_∞ no lineal con efecto integral. Todos los controles serán evaluados a través de simulaciones en Simulink. El estudio se limita al caso plano como primera aproximación del problema, relegando el caso 3D como trabajo futuro tras la obtención de las conclusiones del presente proyecto.

Abstract

This project addresses the air hanging-cargo transportation problem using a single quadrotor UAV. More specifically, this work is framed within the recently started research line where the position of the load is directly controlled, implicitly considering the attitude and position of the quadrotor. On the one hand, this work tries to improve the linear PID and LQR controls already designed in a former work, using for that purpose different control strategies. On the other hand, new robust linear and non-linear controllers are designed and evaluated taking as reference the previous PID and LQR controls. The robust linear control consist in a \mathcal{H}_∞ S/KS/T controller for the control of the load's altitude and in a \mathcal{H}_∞ GS/T controller for the control of the load's horizontal position due to the specificities of the latter. The nonlinear robust control consist in a non-linear \mathcal{H}_∞ control with integral effect. All the controllers are evaluated through simulations under Simulink. The study is limited to the planar case as a first approximation of the problem, relegating the 3D case as future work after obtaining the conclusions of the present project.

Índice

<i>Resumen</i>	III
<i>Abstract</i>	V
<i>Notación</i>	XI
<i>Acrónimos</i>	XVII
1 Introducción	1
1.1 Breve contexto y planteamiento del problema	1
1.2 Estado del arte	2
1.3 Objetivos perseguidos	3
1.4 Organización	4
2 Quadrotor, sistemas de referencia y notación	7
2.1 Quadrotor	7
2.2 Sistemas de referencia	10
2.3 Notación, convenciones, fuerzas y pares actuantes	12
2.3.1 Descripción de la orientación del quadrotor y la carga	12
Velocidad y aceleración angulares del quadrotor	13
Velocidad y aceleración angulares de la carga	15
2.3.2 Posición, velocidad y aceleración absolutas del quadrotor y la carga	16
2.3.3 Masas e inercias del quadrotor y la carga	16
2.3.4 Fuerzas y pares sobre el quadrotor y la carga	17
3 Ecuaciones del movimiento	19
3.1 Ecuaciones del movimiento en coordenadas del cuerpo	20
3.1.1 Ecuaciones de la cinemática	20
3.1.2 Ecuaciones de la dinámica	21
Equilibrio de fuerzas	21
Equilibrio de pares	22
3.2 Ecuaciones del movimiento en coordenadas de la carga	24
3.2.1 Ecuaciones de la cinemática	24
3.2.2 Ecuaciones de la dinámica	25
Equilibrio de fuerzas	25
Equilibrio de pares	25
3.3 Resumen de las ecuaciones del movimiento	26

4 Ecuaciones matriciales y linealización	29
4.1 Ecuaciones matriciales generales	29
4.1.1 Coordenadas del cuerpo	30
4.1.2 Coordenadas de la carga	31
4.2 Desarrollo vectorial en 2D	31
4.2.1 Coordenadas del cuerpo	32
4.2.2 Coordenadas de la carga	33
4.3 Modelos linealizados: desarrollo 2D	34
4.3.1 Coordenadas del cuerpo	35
4.3.2 Coordenadas de la carga	36
4.3.3 Apreciaciones	36
5 Control PID clásico y control óptimo en 2D	39
5.1 Descripción de la planta	40
5.2 Generadores de trayectorias y simulaciones a realizar	42
5.2.1 Simulaciones a realizar	44
5.3 Control lineal de la carga: planta a controlar y estrategias de control	45
5.4 Control de actitud del quadrotor: control lineal clásico PID	48
5.5 Control lineal clásico PID para la posición horizontal y altitud de la carga	52
5.5.1 Lazo externo del control de posición horizontal de la carga	53
5.5.2 Control de altitud de la carga	55
5.5.3 Simulación con la planta no lineal	57
5.6 Control lineal óptimo LQR con efecto integral	64
5.6.1 Control de seguimiento con efecto integral LQRt-I: definición	65
5.6.2 Observador de orden mínimo y estimador de Kalman	67
5.6.3 Lazo externo del control de posición horizontal de la carga	70
5.6.4 Control de altitud de la carga	74
5.6.5 Simulación con la planta no lineal	77
6 Control robusto \mathcal{H}_∞: lineal y no lineal	85
6.1 Control robusto \mathcal{H}_∞ lineal para el lazo externo de la posición horizontal y la altitud de la carga	85
6.1.1 Nociones sobre los problemas \mathcal{H}_∞ lineal S/KS/T y GS/T: inversión y no inversión de la planta	86
6.1.2 Lazo externo del control de posición horizontal de la carga: GS/T de 2 grados de libertad en 1 paso	91
6.1.3 Control de altitud de la carga: S/KS/T	96
6.1.4 Simulación con la planta no lineal	99
6.2 Control robusto \mathcal{H}_∞ no lineal con efecto integral	106
6.2.1 Simulación con la planta no lineal	118
7 Conclusiones y trabajos futuros	127
7.1 Trabajos futuros	129
Apéndice A Ecuaciones matriciales y linealización: 3D	131
A.1 Ecuaciones matriciales: desarrollo vectorial en 3D	131
A.1.1 Coordenadas del cuerpo	132
A.1.2 Coordenadas de la carga	134
A.2 Modelos linealizados: desarrollo 3D	136

A.2.1	Coordenadas del cuerpo	136
A.2.2	Coordenadas de la carga	137
<i>Bibliografía</i>		139

Notación

κ_{th}	Coefficiente de thrust de las palas del quadrotor.
κ_{dr}	Coefficiente de drag de las palas del quadrotor.
c_D	Coefficiente de drag de la carga.
a	Distancia entre el Centro de Gravedad del quadrotor y los rotores.
ϕ	Ángulo de alabeo o roll.
θ	Ángulo de cabeceo o pitch.
ψ	Ángulo de guiñada o yaw.
c_ϵ	Coseno de un ángulo ϵ : $\cos \epsilon$.
s_ϵ	Seno de un ángulo ϵ : $\sin \epsilon$.
$\{\mathcal{A}\}$	Sistema de referencia genérico.
$\{\hat{x}_{\mathcal{A}}, \hat{y}_{\mathcal{A}}, \hat{z}_{\mathcal{A}}\}$	Hace referencia a los ejes $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ de un sistema de coordenadas genérico $\{\mathcal{A}\}$.
${}^A\mathbf{R}_C$	Matriz de rotación que convierte un vector expresado en los ejes de $\{\mathcal{C}\}$, a los ejes de $\{\mathcal{A}\}$. Cuando el sistema $\{\mathcal{A}\}$ pasa a ser el inercial ${}^I\mathbf{R}_C$, la simbología es equivalente a \mathbf{R}_C .
\mathbf{R}_C	Matriz de rotación que convierte un vector expresado en los ejes de $\{\mathcal{C}\}$, a los ejes inerciales $\{\mathcal{I}\}$.
${}^A\boldsymbol{\eta}_C$	Expresión de la matriz de rotación ${}^A\mathbf{R}_C$ mediante la tripla de ángulos roll, pitch y yaw, RPY. Cuando el sistema $\{\mathcal{A}\}$ pasa a ser el inercial ${}^I\mathbf{R}_C$, la simbología es equivalente a $\boldsymbol{\eta}_C$.
$\boldsymbol{\eta}_C$	Expresión de la matriz de rotación \mathbf{R}_C mediante la tripla de ángulos roll, pitch y yaw, RPY.

${}^c({}^D\omega_A)$	Velocidad angular del origen de un sistema de coordenadas genérico $\{A\}$ respecto a otro $\{D\}$, expresado en ejes del sistema $\{C\}$. Cuando el sistema de referencia es el inercial ${}^c({}^T\omega_A)$, la simbología es equivalente a ${}^C\omega_A$.
${}^C\omega_A$	Velocidad angular del origen de un sistema de coordenadas genérico $\{A\}$ respecto al sistema de referencia inercial $\{I\}$, expresado en ejes del sistema $\{C\}$.
${}^D\omega_A$	Velocidad angular del origen de un sistema de coordenadas genérico $\{A\}$ respecto a otro $\{D\}$, expresado en ejes del propio sistema $\{D\}$. Cuando el sistema de referencia es el inercial ${}^T\omega_A$, la simbología es equivalente a ω_A .
ω_A	Velocidad angular del origen de un sistema de coordenadas genérico $\{A\}$ respecto al sistema de referencia inercial $\{I\}$, expresado en ejes del propio sistema inercial $\{I\}$.
${}^c({}^D\alpha_A)$	Aceleración angular del origen de un sistema de coordenadas genérico $\{A\}$ respecto a otro $\{D\}$, expresado en ejes del sistema $\{C\}$. Cuando el sistema de referencia es el inercial ${}^c({}^T\alpha_A)$, la simbología es equivalente a ${}^C\alpha_A$.
${}^C\alpha_A$	Aceleración angular del origen de un sistema de coordenadas genérico $\{A\}$ respecto al sistema de referencia inercial $\{I\}$, expresado en ejes del sistema $\{C\}$.
${}^D\alpha_A$	Aceleración angular del origen de un sistema de coordenadas genérico $\{A\}$ respecto a otro $\{D\}$, expresado en ejes del propio sistema $\{D\}$. Cuando el sistema de referencia es el inercial ${}^T\alpha_A$, la simbología es equivalente a α_A .
α_A	Aceleración angular del origen de un sistema de coordenadas genérico $\{A\}$ respecto al sistema de referencia inercial $\{I\}$, expresado en ejes del propio sistema inercial $\{I\}$.
${}^c({}^Dp_A)$	Vector de posición del origen de un sistema de coordenadas genérico $\{A\}$ respecto a otro $\{D\}$, expresado en ejes del sistema $\{C\}$. Cuando el sistema de referencia es el inercial ${}^c({}^Tp_A)$, la simbología es equivalente a Cp_A .
Cp_A	Vector de posición del origen de un sistema de coordenadas genérico $\{A\}$ respecto al sistema de referencia inercial $\{I\}$, expresado en ejes del sistema $\{C\}$.
Dp_A	Vector de posición del origen de un sistema de coordenadas genérico $\{A\}$ respecto a otro $\{D\}$, expresado en ejes del propio sistema $\{D\}$. Cuando el sistema de referencia es el inercial Tp_A , la simbología es equivalente a p_A .

\mathbf{p}_A	Vector de posición del origen de un sistema de coordenadas genérico $\{A\}$ respecto al sistema de referencia inercial $\{I\}$, expresado en ejes del propio sistema inercial $\{I\}$.
${}^c({}^D\mathbf{v}_A)$	Velocidad del origen de un sistema de coordenadas genérico $\{A\}$ respecto a otro $\{D\}$, expresado en el sistema $\{C\}$. Cuando el sistema de referencia es el inercial ${}^c({}^I\mathbf{v}_A)$, la simbología es equivalente a ${}^C\mathbf{v}_A$.
${}^C\mathbf{v}_A$	Velocidad del origen de un sistema de coordenadas genérico $\{A\}$ respecto al sistema de referencia inercial $\{I\}$, expresado en ejes del sistema $\{C\}$.
${}^D\mathbf{v}_A$	Velocidad del origen de un sistema de coordenadas genérico $\{A\}$ respecto a otro $\{D\}$, expresado en ejes del propio sistema $\{D\}$. Cuando el sistema de referencia es el inercial ${}^I\mathbf{v}_A$, la simbología es equivalente a \mathbf{v}_A .
\mathbf{v}_A	Velocidad del origen de un sistema de coordenadas genérico $\{A\}$ respecto al sistema de referencia inercial $\{I\}$, expresado en ejes del propio sistema inercial $\{I\}$.
${}^c({}^D\mathbf{a}_A)$	Aceleración del origen de un sistema de coordenadas genérico $\{A\}$ respecto a otro $\{D\}$, expresado en el sistema $\{C\}$. Cuando el sistema de referencia es el inercial ${}^c({}^I\mathbf{a}_A)$, la simbología es equivalente a ${}^C\mathbf{a}_A$.
${}^C\mathbf{a}_A$	Aceleración del origen de un sistema de coordenadas genérico $\{A\}$ respecto al sistema de referencia inercial $\{I\}$, expresado en ejes del sistema $\{C\}$.
${}^D\mathbf{a}_A$	Aceleración del origen de un sistema de coordenadas genérico $\{A\}$ respecto a otro $\{D\}$, expresado en ejes del propio sistema $\{D\}$. Cuando el sistema de referencia es el inercial ${}^I\mathbf{a}_A$, la simbología es equivalente a \mathbf{a}_A .
\mathbf{a}_A	Aceleración del origen de un sistema de coordenadas genérico $\{A\}$ respecto al sistema de referencia inercial $\{I\}$, expresado en ejes del propio sistema inercial $\{I\}$.
m_B	Masa del quadrotor (body).
m_C	Masa de la carga (load).
m	Masa total del sistema: $m = m_B + m_C$.
\mathbf{I}_A	Tensor de inercia de un sistema genérico $\{A\}$, respecto a su centro de masas, expresado en el sistema inercial.
${}^{(A)}\mathbf{I}_A$	Tensor de inercia de un sistema genérico $\{A\}$, expresado en el propio sistema $\{A\}$.
${}^{(A)}I_A^{ii}$	Componentes inerciales sobre el eje i del tensor de inercia de un sistema genérico $\{A\}$, expresado en el propio sistema $\{A\}$.

\mathbf{f}_A	Fuerza total actuando sobre el centro de masas del sistema genérico $\{A\}$, expresada en el sistema inercial.
\mathbf{f}_A^g	Fuerzas gravitatorias actuando sobre el sistema genérico $\{A\}$, expresadas en el sistema inercial.
\mathbf{f}_B^C	Fuerza de interacción que ejerce la carga (load) sobre el quadrotor (body), expresada en el sistema inercial. Es igual a la fuerza de interacción que ejerce el quadrotor (body) sobre la carga (load), expresada en el sistema inercial, pero de sentido contrario: $-\mathbf{f}_C^B$.
${}^{(C)}\mathbf{f}_C^B$	Fuerza de interacción, que ejerce el quadrotor (body) sobre la carga (load), expresada en el sistema de referencia de la carga (load).
\mathbf{f}_B^T	Fuerzas propulsivas actuando sobre el quadrotor (body), expresadas en el sistema inercial.
f	Fuerza de empuje total o “ <i>thrust</i> ” de los rotores del quadrotor.
L_A	Momento angular actuando sobre el sistema genérico $\{A\}$, expresado en el sistema inercial.
τ_A	Par total actuando sobre el sistema genérico $\{A\}$, expresado en el sistema inercial.
${}^{(A)}\tau_A$	Par total actuando sobre el sistema genérico $\{A\}$, expresado en los ejes del propio sistema genérico $\{A\}$.
${}^{(B)}\tau_B^T$	Par propulsivo actuando sobre el cuerpo, expresados en los ejes del cuerpo.
${}^{(B)}\tau_{B,i}^T$	Componente i del par propulsivo actuando sobre el cuerpo, expresado en los ejes del cuerpo.
${}^{(C)}\tau_C^B$	Par de interacción que provoca el cuerpo sobre la carga.
$S(\mathbf{v})$	Matriz antisimétrica de un vector genérico \mathbf{v} . Conviene recordar la siguiente propiedad: $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = S(\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2$.
M	Matriz de inercia o de masas.
C	Matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis.
F	Matriz de fuerzas disipativas.
G	Matriz de fuerzas gravitatorias.
\mathbf{q}	Vector de coordenadas generalizadas.
τ	Vector de fuerzas generalizadas.
τ	Constante de tiempo de un sistema dinámico en el dominio de <i>Laplace</i> .
τ_{eq}	Constante de tiempo equivalente de un sistema dinámico de orden superior a 1 en el dominio de <i>Laplace</i> .
ω_c	Frecuencia de corte de un sistema dinámico en el dominio de <i>Laplace</i> .

t_s	Tiempo de subida de un sistema dinámico en el dominio de <i>Laplace</i> .
t_e	Tiempo de establecimiento de un sistema dinámico en el dominio de <i>Laplace</i> .
SO	Sobre-oscilación de un sistema dinámico en el dominio de <i>Laplace</i> .
δ	Coefficiente de amortiguamiento de un sistema dinámico en el dominio de <i>Laplace</i> .
M_f	Margen de fase de un sistema dinámico en el dominio de <i>Laplace</i> .
M_g	Margen de ganancia de un sistema dinámico en el dominio de <i>Laplace</i> .
$S_e(s)$	Función de sensibilidad a la salida de la planta.
$T_e(s)$	Función de sensibilidad complementaria a la salida de la planta.
$S_u(s)$	Función de sensibilidad a la entrada de la planta.
$T_u(s)$	Función de sensibilidad complementaria a la entrada de la planta.
$T_{zw}(s)$	Función de transferencia en bucle cerrado de la planta generalizada (problema del control \mathcal{H}_∞) desde el vector de salidas z al vector de entradas ω .

Acrónimos

2D	2 dimensiones.
3D	3 dimensiones.
DOF	Grados de libertad (Degrees of Freedom).
VTOL	Despegue y aterrizaje vertical (Vertical Take-Off and Landing).
UAV	Vehículo aéreo no tripulado (Unmanned Aerial Vehicle).
MAV	Vehículo aéreo de pequeño tamaño (Micro Aerial Vehicle).
CG	Centro de Gravedad (Center of Gravity).
GT	Generador de trayectorias.
RPY	Alabeo, Cabeceo y Guiñada (Roll, Pitch, Yaw).
rpm	Revoluciones por minuto.
fdt	Función de transferencia.
SISO	Una entrada y una salida (Single Input Single Output).
MIMO	Varias entradas y varias salidas (Multiple Input Multiple Output).
SS	Espacio de estados (State-Space).
LQR-I	Regulador LQR con efecto integral.
LQRt-I	Control de seguimiento LQR con efecto integral.
LQG-I	Regulador LQG con efecto integral.
LQGt-I	Control de seguimiento LQG con efecto integral.

1 Introducción

1.1 Breve contexto y planteamiento del problema

Resulta ya bien conocido el auge que los vehículos aéreos no tripulados (UAV) han experimentado en las últimas décadas, especialmente debido al desarrollo tecnológico de sensores, actuadores, baterías, materiales, reducción de costes, etc., [8]. Aunque el interés militar impulsó su desarrollo considerablemente desde finales de los años 50 (tras la II Guerra Mundial y al inicio de la Guerra de Vietnam), [8], [33], desde 1990 también se está investigado su uso para numerosas aplicaciones civiles,[33], [19]. Algunos ejemplos son: inspección, vigilancia, búsqueda y rescate, lucha contra incendios, manipulación, transporte, etc. Tal y como se estimó hace 1 década, [33], la investigación y desarrollo de los UAV de pequeño tamaño (MAVs) tienen un importante papel en la actualidad en cuanto a aplicaciones civiles se refiere, y se estima que tendrán un impacto socio-económico mayor en un futuro, [15]. En este último artículo se analizan las aplicaciones y retos a los que los MAVs se enfrentan en la actualidad. Cabría destacar una noticia publicada recientemente: la empresa "Wing", de Google, ha obtenido la certificación de la FAA en USA para operar con MAV para el reparto de carga a domicilio, [6].

Existen distintas configuraciones de MAV, como por ejemplo, de ala fija, de alas rotatorias, de motores abatibles, tipo dirigible, tipo insecto, etc, [33], [8], [15]. Dependiendo de la configuración, los MAV serán más o menos apropiados para determinadas aplicaciones. Los MAV de ala fija pueden ofrecer buenos resultados para largos tiempo de vuelo, para aplicaciones tipo de búsqueda y rescate, mientras que los MAV de ala rotatoria son más apropiados para aplicaciones en las que se requiera vuelo estacionario, como pueden ser inspección de estructuras o transporte de carga entre puntos cercanos (dentro de una misma ciudad), [15].

Dentro de la línea del transporte de carga mediante UAVs (para cortas y medianas distancias), la configuración de ala rotatoria más extendida es la de quadrotor. Entre sus ventajas más destacadas, en comparación con otro tipo de modelos, se encuentran: la simplicidad de la mecánica, la alta carga de peso que puede soportar, efectos giroscópicos reducidos, la capacidad de aterrizaje y despegue vertical, y su gran maniobrabilidad, [8], [19].

Dado ya cierto contexto dentro del sector de los UAV y de los MAV, este proyecto se enmarca dentro del problema del transporte aéreo de carga colgante tipo péndulo mediante un único UAV de ala rotatoria. La ventaja de este tipo de transporte de carga con respecto a las propuestas en las que

la carga se adjunta al cuerpo del UAV es que se mantiene la maniobrabilidad del mismo. En este último problema, la inercia del sistema aumenta, reduciendo la respuesta en la actitud del UAV.

1.2 Estado del arte

De manera más específica, este trabajo se presenta como una continuación de la línea de investigación iniciada por Franz Daviz Bähner, [3]. En dicho trabajo se aborda el problema del transporte de carga colgante (tipo péndulo) mediante un único quadrotor, introduciendo la novedad de controlar directamente la posición de la carga, prestando atención a la posición y actitud del quadrotor de manera implícita. Este tipo de enfoque sobre el control de la carga en lugar del control del quadrotor adquiere especial importancia en aplicaciones de tipo rescate y exploración, operación sobre entornos difíciles o peligrosos, distribución de pesticidas, monitorización, en operaciones cercanas al suelo, etc, en donde se requiere una buena precisión en cuanto a la posición de la carga se refiere, [3]. Además, permitirá maniobras más dinámicas y de mayor precisión con respecto a los enfoques del control del quadrotor que tratan de minimizar las oscilaciones de la carga al mismo tiempo, y mayor precisión que las estrategias en donde se omite el efecto de la carga sobre el quadrotor.

Tal y como se especifica en [3], ya existían dos artículos previos que abordaban el control de la carga directamente, [49], [48], en los que se proponen controles no lineales (control geométrico para el caso [48]) basados en la teoría de la estabilidad de Lyapunov. No obstante, hasta donde se ha podido comprobar, el estudio de Franz Daviz Bähner [3] fue el primero que demostró la posibilidad de acometer dicho problema a través de controles lineales más simples, de tipo PID y LQR. Aunque los sistemas presentaban un retraso en el seguimiento de trayectorias de la carga, este problema se solventó a través de estrategias de adelanto de trayectorias. Por otra parte, también se intentaron aplicar técnicas no lineales tipo backstepping y feedback linearization, aunque sin éxito para el problema de control de la carga debido a la pérdida de ciertas propiedades estructurales del modelo no lineal de la planta. Estas aproximaciones se aplicaron únicamente al caso 2D con la intención de ganar intuición y experiencia de cara a su futura aplicación al caso 3D, contando también con que en el caso 2D se mantienen los principales retos de control: subactuación y oscilación de la carga.

Desde entonces, los autores de las publicaciones [49] y [48] han continuado la línea de investigación de estos mismos artículos. En [14] se modela la cuerda como una serie de enlaces conectados, diseñando un control no lineal de forma que la cuerda permanezca recta en todo momento. De esta manera, la trayectoria del quadrotor coincidirá con la de la carga. Esto limita la velocidad del sistema. En [21] se demuestra que los controles geométricos diseñados en artículos previos considerando cuerdas inelásticas son también válidos considerando cuerdas elásticas, consiguiendo que la carga se mantenga en las cercanías de la trayectoria deseada. En [50] detectan la posición de la carga mediante una cámara y un filtro extendido de Kalman, y consiguen seguir trayectorias agresivas para la carga a través de un control geométrico, comprobando los resultados en experimentos reales. Por otra parte, estos mismos autores también han extendido el problema al caso del transporte aéreo de cargas pesadas siguiendo una determinada trayectoria mediante múltiples UAVs, [25], [24], [54], diseñando controles geométricos bajo distintas suposiciones de masa de la carga y de número de quadrotors a usar. En [22] se aborda el problema de uno o múltiples UAVs transportando una carga, considerando que el cable no está en modo rígido en todo momento y que tiene cierta masa. Para ello se modelan las cuerdas como una serie de enlaces conectados, y se usan controles LQR. El seguimiento de la trayectoria de la carga se consigue para regiones de atracción grandes.

Otros autores también han publicado artículos dentro de la línea de investigación del seguimiento de la trayectoria por parte de la carga. En [38] se propone un control no lineal de aprendizaje reforzado, donde el quadrotor ha de aprender su propia trayectoria al mismo tiempo que asegura que la carga siga la trayectoria de referencia. Se obtienen errores de algunos centímetros. Se estima que estos se deben a que el tipo de control no lineal usado no es completamente robusto a incertidumbres en los parámetros del sistema, como ya se comprobó en otro de sus trabajos previos. En [17] y [55] se propone un control predictivo no lineal NMPC y un control predictivo MPC respectivamente, obteniendo también errores de algunos centímetros en el seguimiento de la trayectoria. En [2] se aborda el problema del seguimiento de una trayectoria por parte de la carga a través de 2 UAVs usando un control LQR iterativo.

Adquieren especial relevancia los artículos publicados por G. V. Raffo et al. Dicho autor aborda el problema del seguimiento de una trayectoria por parte de la carga colgante usando para ello un UAV tilt-rotor. Este tilt-rotor estaría compuesto por únicamente dos rotores, con la capacidad de inclinarse hacia delante o hacia atrás, unidos mediante un brazo. Este tipo de UAV tiene la capacidad de despegar y aterrizar verticalmente, junto con la capacidad de conseguir distancias de vuelo más amplias a las que un quadrotor podría conseguir gracias a su configuración tipo avión. No obstante, esto conlleva una pérdida de la maniobrabilidad característica de un quadrotor, muy útil para escenarios difíciles en los que se requiera salvar obstáculos, para frenadas de emergencia, para rechazo de perturbaciones tipo ráfagas de viento puntuales, etc., lo cual es importante si se trata de una carga delicada.

En los artículos publicados por G. V. Raffo et al. que se mencionarán a continuación se cuenta con una cámara que provee la posición de la carga con respecto al quadrotor, usando además un estimador de estados para solventar problemas de ruidos de sensores y de tiempos de muestreo. En [41] se demuestra que un control lineal tipo LQR es suficiente para conseguir el seguimiento de la trayectoria por parte de la carga bajo la suposición de pequeñas aceleraciones de la misma, así como para conseguir rechazo frente a perturbaciones y robustez frente a incertidumbres. Además, se usa un filtro de Kalman estándar para la estimación de estados. En [45] se propone un control predictivo tipo MPC y un filtro de Kalman no lineal ("unscented") para la estimación de estados no lineales. Además, se incorpora el control de guiñada y la variación de la longitud de la cuerda en el problema de control para cubrir la trayectoria completa de manera robusta, desde el despegue hasta el aterrizaje, para el rechazo de perturbaciones y para mantener la estabilización del UAV. En [42], [44] y [43] se aborda el problema usando un control robusto mixto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para el seguimiento de la trayectoria por parte de la carga, y usando distintas técnicas de estimadores de estados zonotópicas.

1.3 Objetivos perseguidos

Como se ha apuntado anteriormente, este proyecto trata el problema del transporte aéreo de carga tipo péndulo, enfocándolo como una continuación de la línea iniciada por Franz Daviz Bähner, [3]. En esta continuación se mantiene la estrategia de un solo UAV, pues la aplicación de destino será para el transporte cargas mucho más ligeras que el UAV. Además, se descarta el uso de UAVs tipo tilt-rotor en favor de los UAV tipo quadrotor con la intención de conservar la maniobrabilidad característica de estos últimos en toda la fase del vuelo.

En la literatura, se ha observado que existen principalmente dos ramas de investigación: control geométrico (control no lineal) de la carga usando quadrotors, y control robusto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ (control

no lineal) usando un UAV tilt-rotor. Por una parte, puesto que la literatura se decanta claramente por la aplicación de estrategias no lineales, se tratará de mejorar los controles lineales tipo PID y LQR ya planteados por Franz Daviz Bähner, con el objetivo de consolidar la validez del uso de controles lineales, no siendo necesario forzosamente el uso de estrategias más complicadas. Más específicamente, se tratará de mejorar el seguimiento de trayectorias de la carga intentando evitar el uso de estrategias de adelanto de la trayectoria, así como conseguir un buen rechazo frente a perturbaciones. Por otra parte, dado que el problema del transporte aéreo de carga colgante está sujeto a grandes incertidumbres en la realidad, ciertos controles pueden ver reducidas significativamente sus propiedades de estabilización de sistemas, de seguimiento de trayectorias, y de rechazo de perturbaciones, como ocurrió en un artículo previo de [38]. Por este motivo, también se evaluará el rendimiento conseguido por controles robustos \mathcal{H}_∞ lineal y no lineal para el caso de UAVs tipo quadrotor dentro del enfoque del control directo de la carga. Para tal fin se compararán con los controles tipo PID y LQR anteriores.

El problema se volverá a abordar en 2 dimensiones, con la intención de evaluar los controles previamente y ganar experiencia e intuición sobre los mismos antes de su aplicación al caso en 3 dimensiones. Además, como ya se apuntó en [3], los retos de control principales se conservan: subactuación del sistema y oscilación de la carga.

Por tanto, los objetivos principales perseguidos a lo largo de este proyecto serán:

- Planteamiento de las ecuaciones generales del movimiento en coordenadas de la carga a través del formalismo de *Newton-Euler*, y posterior particularización para el caso en 2D. Comparación con las ecuaciones deducidas en [3] a través del formalismo *Euler-Lagrange*.
- Diseñar controles lineales tipo PID y LQR para el control de la posición de la carga tratando de evitar el uso de estrategias de avance de la trayectoria. Tratar de conseguir al mismo tiempo un buen rechazo de perturbaciones.
- Evaluar el rendimiento de controles robustos \mathcal{H}_∞ lineales y no lineales para el control de posición de la carga en comparación con los anteriores PID y LQR:
 - Control robusto \mathcal{H}_∞ lineal: se estudiarán los algoritmos \mathcal{H}_∞ S/KS/T y \mathcal{H}_∞ GS/T.
 - Control robusto \mathcal{H}_∞ no lineal: \mathcal{H}_∞ no lineal propuesto en [39].

1.4 Organización

Habiendo introducido ya el problema a tratar, a continuación se expondrá la distribución del presente proyecto.

En el Capítulo 2 se introducirán los sistemas quadrotor, aportando también los parámetros particulares usados en este trabajo. Además, se detallarán los sistemas de referencia a considerar, así como la notación, convenciones, y fuerzas y pares que se encontrarán.

En el Capítulo 3 se desarrollarán las ecuaciones del movimiento en formato vectorial a través del formalismo de *Newton-Euler*. Se comenzará obteniendo las ecuaciones en coordenadas del

cuerpo, mostrando así el procedimiento habitual. Posteriormente se deducirán las ecuaciones en coordenadas de la carga. De esta manera se pretende aportar una mayor facilidad e intuición en la comprensión de las mismas. Tras esto, en el Capítulo 4 se hallarán las ecuaciones matriciales, se desarrollarán vectorialmente en 2D, y se obtendrán los modelos linealizados de las mismas. Estos resultados serán comparados con los obtenidos en [3] a través del formalismo *Lagrange-Euler*.

En el Capítulo 5 se introducirá la planta a usar en las simulaciones junto con las distintas hipótesis que se adoptarán, así como la descripción de las simulaciones que se usarán para la validación de los controles. También se presentará la planta a considerar para el diseño de los controles lineales, y las estrategias de control que adoptarán los mismos. Seguidamente se diseñarán los controles lineales tipo PID y LQR, se simularán y se evaluarán.

En el Capítulo 6 se introducirán los controles \mathcal{H}_∞ lineal y no lineal, las plantas para el diseño de los controles y las estrategias de control a implementar en cada caso. Posteriormente se simularán y evaluarán en comparación con los anteriores controles PID y LQR.

Por último, en el Capítulo 7 se resumirán las principales conclusiones encontradas en el desarrollo del conjunto del proyecto. También se incluirán los trabajos futuros a tratar.

2 Quadrotor, sistemas de referencia y notación

En este capítulo se realizará una breve introducción a los sistemas quadrotor, mostrando así mismo algunas de las características particulares del quadrotor del presente proyecto. Además, se detallarán los sistemas de referencia empleados para una correcta definición del sistema completo. Se aprovechará también para explicar de manera algo más extendida la notación, convenciones usadas y fuerzas y pares actuando sobre el quadrotor.

2.1 Quadrotor

Como ya es bien conocido, [9], un quadrotor es un vehículo aéreo, de despegue y aterrizaje vertical (VTOL), que consta de 4 rotores y 6 DOF. De esta manera, el sistema constituye un sistema subactuado.

Usando la Figura 2.1 como ejemplo, y tomando como referencia [9], 2 rotores giran según las agujas del reloj, rotores 2 y 4, mientras que los otros dos giran al contrario de las agujas del reloj, rotores 1 y 3. Modificando la velocidad de los rotores es posible controlar el quadrotor en sus 6 grados de libertad. Por ejemplo, considerando los ejes de referencia de color azul ligados al quadrotor de la imagen, provocando diferencias de velocidad entre los rotores 2 y 4 se consigue una variación en el ángulo de alabeo o roll del quadrotor, lo que provoca un movimiento lateral del mismo. Para conseguir un movimiento longitudinal, el quadrotor actuaría de la misma manera sobre los rotores 1 y 3, induciendo un ángulo de cabeceo o pitch. Por otra parte, el movimiento de guiñada o yaw se conseguiría gracias a la diferencia de pares entre cada par de rotores, manteniendo equiparadas las fuerzas según los rotores que giran en el mismo sentido. Por último, el movimiento vertical tendría lugar usando una mayor o menor fuerza propulsiva conjunta, siendo esta fuerza de la misma magnitud en cada uno de los rotores para evitar inducir cualquier otro movimiento.

En la Figura 2.1, las flechas blancas más gruesas dentro de los rotores indican mayor capacidad propulsiva, y viceversa. Las flechas rojas en el exterior del quadrotor indican qué tipo de movimiento tendría lugar según la intensidad de las fuerzas generadas por los rotores

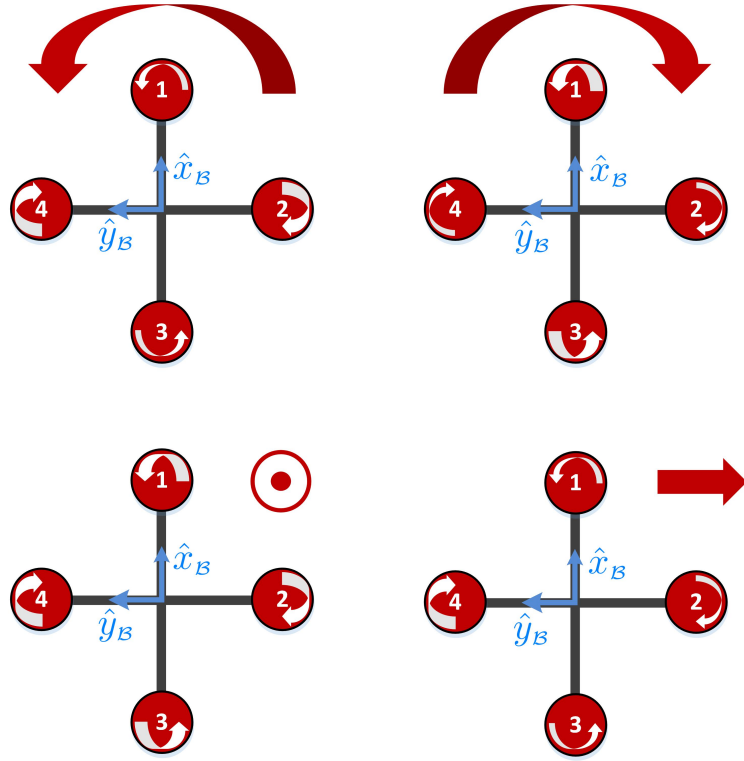


Figura 2.1 Descripción del movimiento de un quadrotor.

A continuación se tratará de trasladar lo anterior a expresiones matemáticas. Para ello, la fuerza ejercida por cada uno de los rotores puede aproximarse según la siguiente expresión, [3]:

$$f_i = \kappa_{th} \Omega_i^2$$

donde κ_{th} denota el coeficiente de empuje o “*thrust*”, y Ω_i las revoluciones por minuto, rpm, de cada rotor. No obstante, se tomarán como actuaciones del quadrotor la fuerza total y los pares o momentos en cada eje del quadrotor directamente, en lugar de las revoluciones de los rotores o de intensidades eléctricas en un desarrollo más extendido. Esto implicará que se deberá añadir la dinámica correspondiente a los tiempos de reacción de dichas actuaciones una vez se proceda a las simulaciones, tratando así de conservar cierto realismo en las mismas.

Dicho lo anterior, la fuerza total (causante del movimiento vertical) y los momentos (causantes de los movimientos longitudinal y lateral) podrían aproximarse en función de la fuerza proporcionada por cada rotor a través de las siguientes relaciones, [3]:

$$\begin{aligned} f &= f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \\ {}^{(B)}\tau_{B,\hat{x}} &= a (f_2 - f_4) \\ {}^{(B)}\tau_{B,\hat{y}} &= a (f_1 - f_3) \\ {}^{(B)}\tau_{B,\hat{z}} &= \frac{\kappa_{dr}}{\kappa_{th}} (f_1 - f_2 + f_3 - f_4) \end{aligned}$$

dónde a es la distancia de los rotores al centro geométrico del quadrotor, y κ_{dr} el coeficiente de resistencia o “drag”.

Suponiendo que la fuerza proporcionada por cada rotor tiene una dinámica con un tiempo de subida de 0.01 segundos, la fuerza propulsiva total y el movimiento de guiñada o yaw tendrán este mismo tiempo de subida. Por otro lado, en cuanto a los momentos, estos se verán beneficiados por la fuerza de la gravedad, reduciendo sus tiempos de subida a 0.008 segundos.

Considerando las ecuaciones anteriores se puede establecer una relación en formato matricial entre cada fuerza propulsiva de cada rotor, f_i , y la fuerza total y momentos de alabeo, cabeceo y guiñada, [3]:

$$\begin{bmatrix} f \\ {}^{(B)}\tau_{B,\hat{x}} \\ {}^{(B)}\tau_{B,\hat{y}} \\ {}^{(B)}\tau_{B,\hat{z}} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}; \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & -a \\ a & 0 & -a & 0 \\ \frac{\kappa_{dr}}{\kappa_{th}} & -\frac{\kappa_{dr}}{\kappa_{th}} & \frac{\kappa_{dr}}{\kappa_{th}} & -\frac{\kappa_{dr}}{\kappa_{th}} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Por otra parte, para la relación inversa se usaría, [3]:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2a} & \frac{1}{4} \frac{\kappa_{dr}}{\kappa_{th}} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2a} & 0 & -\frac{1}{4} \frac{\kappa_{dr}}{\kappa_{th}} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2a} & \frac{1}{4} \frac{\kappa_{dr}}{\kappa_{th}} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2a} & 0 & -\frac{1}{4} \frac{\kappa_{dr}}{\kappa_{th}} \end{bmatrix}$$

En cuanto a la carga, esta estará unida al centro geométrico del quadrotor por una cuerda. El valor de la cuerda ha sido elegido considerando que esta no debe ser inferior a 0.6 metros, dado que a menores longitudes de cuerda mayor dinámica tendrá la carga, y por consiguiente, mayor esfuerzo se le exigirá al quadrotor. Por otra parte, también se ha considerado una longitud de la misma de alrededor de 1 metro como distancia de seguridad ante el supuesto de que una persona deba retirar directamente la carga del quadrotor, estando dicho aparato en funcionamiento.

En la siguiente tabla se resumen los valores particulares del quadrotor y de la carga usados en el presente proyecto, y que serán necesarios para las simulaciones:

Tabla 2.1 Valores de los parámetros del quadrotor y la carga.

m_B	2.24 kg	Masa del quadrotor
m_C	0.118 kg	Masa de la carga
a	0.332 m	Distancia entre el CG del quadrotor y los rotores
l	0.97 m	Longitud de la cuerda que une la carga al quadrotor.
${}^{(B)}I_B^{xx}$	0.0363 kg m ²	Momento de Inercia x
${}^{(B)}I_B^{yy}$	0.0363 kg m ²	Momento de Inercia y
${}^{(B)}I_B^{zz}$	0.0615 kg m ²	Momento de Inercia z
κ_{th}	$9.5 \cdot 10^{-6}$	Coefficiente de thrust de las palas
κ_{dr}	$1.7 \cdot 10^{-7}$	Coefficiente de drag de las palas
c_D	$0.3 \frac{N}{m s^2}$	Coefficiente de drag de la carga

Por último, una aclaración que concierne a la capacidad de los actuadores del quadrotor. Puesto que en la realidad no se dispondrá de actuaciones de valor infinito, se deberán establecer unos valores máximos o saturaciones. Para ello, se ha considerado que la fuerza propulsiva máxima del quadrotor sea 1.7 veces su peso. Por tanto, cada rotor podría aportar un *thrust* máximo de 9.28 N, y cada pareja de rotores girando en el mismo sentido podrán ejercer un par máximo de 3.26 Nm:

$$f_{i,max} = \frac{1}{4} 1.7 m g = 9.28 \text{ N} \quad (2.2)$$

$${}^{(B)}\tau_{B,ij,max} = a (f_{i,max} - f_{j,min}) = a (f_{i,max} - 0) = 3.26 \text{ Nm}$$

2.2 Sistemas de referencia

Como ya se ha apuntado anteriormente, el sistema de estudio estará compuesto por un quadrotor y una carga unida a él mediante una cuerda a modo péndulo. Por tanto, se requerirá de 3 sistemas de referencia, Figura 2.2:

- $\{\mathcal{I}\} = \{\hat{x}_I, \hat{y}_I, \hat{z}_I\}$: *Inertial*. Sistema de referencia inercial. Se asume coincidente con el sistema de referencia ligado a la Tierra: \hat{x}_I hacia el Norte, \hat{y}_I hacia el Este, \hat{z}_I hacia arriba.
- $\{\mathcal{B}\} = \{\hat{x}_B, \hat{y}_B, \hat{z}_B\}$: *Body*. Sistema de referencia ligado al quadrotor. Su origen coincide con el centro de masas de dicho cuerpo: \hat{x}_B apunta hacia la dirección de avance del quadrotor, \hat{y}_B hacia la izquierda respecto a la dirección de avance, \hat{z}_B hacia arriba.

- $\{\mathcal{L}\} = \{\hat{x}_L, \hat{y}_L, \hat{z}_L\}$: *Load*. Sistema de referencia ligado a la carga. Su origen coincide con la misma carga, considerada como una masa puntual: \hat{x}_L en la dirección de avance del quadrotor en la situación de reposo de la carga, \hat{y}_L hacia la izquierda respecto a la dirección de avance del quadrotor en situación de reposo de la carga, \hat{z}_L en la misma dirección que la cuerda que une el quadrotor y la carga, con sentido hacia el quadrotor.

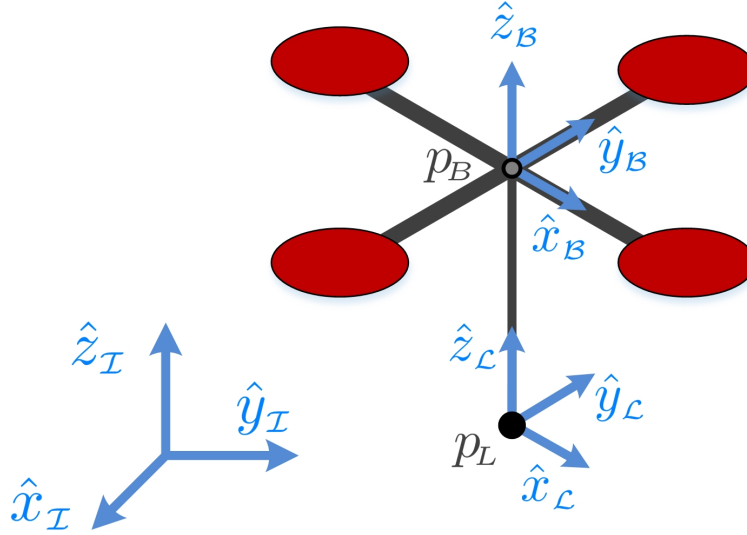


Figura 2.2 Sistemas de referencia inercial, ligado al quadrotor y ligado a la carga.

Mirando la Figura 2.3 y considerando los anteriores 3 sistemas de referencia, la posición del CG del quadrotor con respecto al sistema de referencia inercial vendría representada por $\mathbf{p}_B = [x_B, y_B, z_B]^\top$. Por otro lado, los ángulos de alabeo y cabeceo vendrían dados según ϕ_B y θ_B respectivamente, y el de guiñada vendría definido por ψ_B (no mostrado en la Figura 2.3). En cuanto a la carga, su posición con respecto al sistema de referencia inercial vendría dada por $\mathbf{p}_L = [x_L, y_L, z_L]^\top$, y los ángulos de alabeo y cabeceo por ϕ_L y θ_L respectivamente. El movimiento de guiñada de la carga carece de interés. Como se puede apreciar en la Figura 2.3, y atendiendo a los sistemas de referencia establecidos, valores positivos de θ_B y θ_L se corresponden con giros en el sentido de las agujas del reloj, mientras que para los ángulos ϕ_B y ϕ_L , el sentido positivo está definido con giros en sentido contrario a las agujas del reloj. Finalmente, usando el dibujo de la esquina superior izquierda de la Figura 2.1, el movimiento de guiñada del quadrotor tendría sentido positivo con giros en sentido contrario a las agujas del reloj.

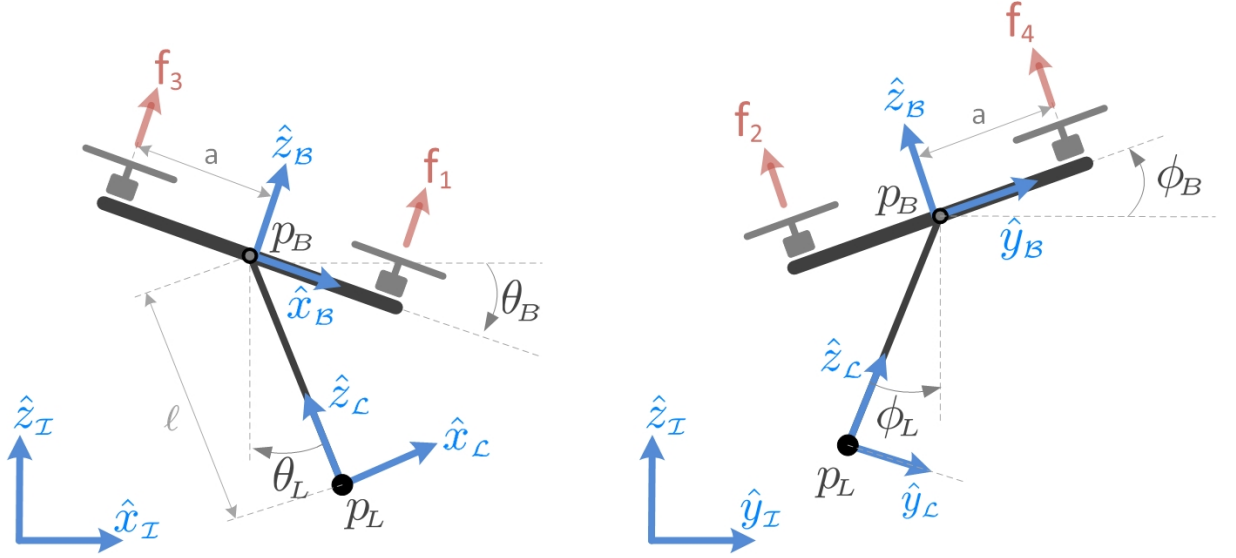


Figura 2.3 Definición las posiciones y de los sentidos de giro positivos de los ángulos relativos al quadrotor y la carga.

2.3 Notación, convenciones, fuerzas y pares actuantes

Esta subsección pretende ser una particularización algo más detallada de la notación especificada al inicio de este documento. Se ha optado por dividirla en diferentes partes para mejorar su comprensión:

- Descripción de la orientación del quadrotor y la carga.
- Velocidad y aceleración angulares del quadrotor.
- Velocidad y aceleración angulares de la carga.
- Posición, velocidad y aceleración absolutas del quadrotor y la carga.
- Masas e inercias del quadrotor y la carga.
- Fuerzas y pares actuando sobre el quadrotor y la carga.

2.3.1 Descripción de la orientación del quadrotor y la carga

$\eta_B \triangleq {}^I\eta_B = [\phi_B, \theta_B, \psi_B]^T$: Orientación inercial del cuerpo, expresada mediante tripleta de ángulos RPY.

$\eta_L \triangleq {}^I\eta_L = [\phi_L, \theta_L, \psi_L]^T$: Orientación inercial de la carga, expresada mediante tripleta de ángulos RPY.

$R_B \triangleq {}^I R_B$: Orientación inercial del cuerpo, en forma de matriz de rotación. Se opta por la

convención de giros sucesivos según los ángulos de *Tait-Bryan*, [27]: ${}^{\mathcal{I}}\mathbf{R}_{\mathcal{B}} = \mathbf{R}_{\hat{z},\psi} \cdot \mathbf{R}_{\hat{y},\theta} \cdot \mathbf{R}_{\hat{x},\phi}$. Esta convención es ampliamente usada en el campo de la aeronáutica. Así pues, cada una de las matrices tomaría la forma siguiente:

$$\mathbf{R}_{\hat{x},\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi & c_\phi \end{bmatrix}; \mathbf{R}_{\hat{y},\theta} = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix}; \mathbf{R}_{\hat{z},\psi} = \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{\mathcal{I}}\mathbf{R}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & c_\psi s_\phi s_\theta - c_\phi s_\psi & s_\phi s_\psi + c_\phi c_\psi s_\theta \\ s_\psi s_\theta & s_\phi s_\psi s_\theta + c_\phi c_\psi & -c_\psi s_\phi + c_\phi s_\psi s_\theta \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix}$$

siendo $c_\gamma = \cos(\gamma)$, $s_\gamma = \sin(\gamma)$.

$\mathbf{R}_{\mathcal{L}} \triangleq {}^{\mathcal{I}}\mathbf{R}_{\mathcal{L}}$: Orientación inercial de la carga, en forma de matriz de rotación, según los ángulos de *Tait-Bryan*: ${}^{\mathcal{I}}\mathbf{R}_{\mathcal{L}} = \mathbf{R}_{\hat{z},\psi_{\mathcal{L}}} \cdot \mathbf{R}_{\hat{y},\theta_{\mathcal{L}}} \cdot \mathbf{R}_{\hat{x},\phi_{\mathcal{L}}}$. Las expresiones de las matrices son análogas al caso del quadrotor.

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_{\mathcal{B}} \triangleq {}^{\mathcal{I}}\dot{\boldsymbol{\eta}}_{\mathcal{B}} \equiv \frac{d({}^{\mathcal{I}}\boldsymbol{\eta}_{\mathcal{B}})}{dt} = [\dot{\phi}_{\mathcal{B}}, \dot{\theta}_{\mathcal{B}}, \dot{\psi}_{\mathcal{B}}]^{\top}: \text{Derivada de la tripleta de ángulos RPY del cuerpo.}$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_{\mathcal{L}} \triangleq {}^{\mathcal{I}}\dot{\boldsymbol{\eta}}_{\mathcal{L}} \equiv \frac{d({}^{\mathcal{I}}\boldsymbol{\eta}_{\mathcal{L}})}{dt} = [\dot{\phi}_{\mathcal{L}}, \dot{\theta}_{\mathcal{L}}, \dot{\psi}_{\mathcal{L}}]^{\top}: \text{Derivada de la tripleta de ángulos RPY de la carga.}$$

Velocidad y aceleración angulares del quadrotor

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} \triangleq {}^{\mathcal{I}}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}: \text{Velocidad angular inercial del cuerpo.}$$

${}^{\mathcal{B}}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} \triangleq {}^{\mathcal{B}}({}^{\mathcal{I}}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}) \equiv {}^{\mathcal{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{I}} {}^{\mathcal{I}}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}$: Velocidad angular inercial del cuerpo, expresada en ejes del cuerpo. Cuando se consideran movimientos respecto a los propios ejes móviles del cuerpo coincide con la notación aeronáutica: ${}^{\mathcal{B}}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} = \boldsymbol{\Omega} = [p, q, r]^{\top}$. Puesto que usualmente se consideran movimientos angulares respecto ejes móviles para vehículos aéreos, se adoptará esta forma de proceder. A continuación se detallará su obtención, [27].

La velocidad angular del quadrotor al que se le une un sistema de referencia móvil $\{\mathcal{B}\}$ viene dada por:

$${}^{\mathcal{B}}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} = \dot{\phi} {}^{\mathcal{B}_3}\mathbf{u}_{\hat{x}} + \dot{\theta} {}^{\mathcal{B}_3}({}^{\mathcal{B}_2}\mathbf{u}_{\hat{y}}) + \dot{\psi} {}^{\mathcal{B}_3}({}^{\mathcal{B}_1}\mathbf{u}_{\hat{z}})$$

donde ${}^{\mathcal{B}_3}\mathbf{u}_{\hat{x}}$, ${}^{\mathcal{B}_3}({}^{\mathcal{B}_2}\mathbf{u}_{\hat{y}})$ y ${}^{\mathcal{B}_3}({}^{\mathcal{B}_1}\mathbf{u}_{\hat{z}})$ representan los vectores unitarios ligados a los ejes del sistema de referencia del cuerpo respecto a los que se realizan los tres giros sucesivos, expresados en el sistema de referencia final del cuerpo. Dado que se emplea la convención de *Tait-Bryant*, se tendrá:

$$\begin{aligned}
{}^{\mathcal{B}_3}\mathbf{u}_{\hat{x}} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
{}^{\mathcal{B}_3}({}^{\mathcal{B}_2}\mathbf{u}_{\hat{y}}) &= \mathbf{R}_{\hat{x},\phi_{\mathcal{B}}}^\top \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_{\phi_{\mathcal{B}}} \\ -s_{\phi_{\mathcal{B}}} \end{bmatrix} \\
{}^{\mathcal{B}_3}({}^{\mathcal{B}_1}\mathbf{u}_{\hat{z}}) &= \mathbf{R}_{\hat{x},\phi_{\mathcal{B}}}^\top \cdot \mathbf{R}_{\hat{y},\theta_{\mathcal{B}}}^\top \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_{\theta_{\mathcal{B}}} \\ c_{\theta_{\mathcal{B}}} s_{\phi_{\mathcal{B}}} \\ c_{\phi_{\mathcal{B}}} c_{\theta_{\mathcal{B}}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Denotando $\mathbf{W}_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathcal{B}})$ tal y como sigue:

$$\mathbf{W}_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathcal{B}}) = [{}^{\mathcal{B}_3}\mathbf{u}_{\hat{x}}, {}^{\mathcal{B}_3}({}^{\mathcal{B}_2}\mathbf{u}_{\hat{y}}), {}^{\mathcal{B}_3}({}^{\mathcal{B}_1}\mathbf{u}_{\hat{z}})] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_{\theta_{\mathcal{B}}} \\ 0 & c_{\phi_{\mathcal{B}}} & c_{\theta_{\mathcal{B}}} s_{\phi_{\mathcal{B}}} \\ 0 & -s_{\phi_{\mathcal{B}}} & c_{\phi_{\mathcal{B}}} c_{\theta_{\mathcal{B}}} \end{bmatrix}$$

la velocidad angular del cuerpo expresada en ejes del cuerpo se puede definir, por tanto, como:

$${}^{(\mathcal{B})}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} = \mathbf{W}_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathcal{B}}) \dot{\boldsymbol{\eta}}_{\mathcal{B}} \quad (2.3)$$

$\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}} \triangleq {}^{\mathcal{I}}\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}} = \frac{d({}^{\mathcal{I}}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}})}{dt}$: Aceleración angular inercial del cuerpo.

${}^{(\mathcal{B})}\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}} \triangleq {}^{\mathcal{B}}({}^{\mathcal{I}}\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}}) = {}^{\mathcal{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{I}} {}^{\mathcal{I}}\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}}$: Aceleración angular inercial del cuerpo, expresada en el cuerpo.

${}^{(\mathcal{B})}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathcal{B}} \triangleq \frac{d({}^{(\mathcal{B})}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}})}{dt} = \dot{\mathbf{W}}_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathcal{B}}) \dot{\boldsymbol{\eta}}_{\mathcal{B}} + \mathbf{W}_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathcal{B}}) \ddot{\boldsymbol{\eta}}_{\mathcal{B}}$: Derivada de la velocidad angular absoluta del cuerpo expresada en ejes del cuerpo. Además: ${}^{(\mathcal{B})}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathcal{B}} = \dot{\boldsymbol{\Omega}} = [\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}]^\top$. Por otro lado, cabe hacer notar que ${}^{(\mathcal{B})}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathcal{B}} \neq {}^{(\mathcal{B})}\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}}$. Para demostrarlo, se prefiere acudir a un caso sencillo y genérico:

Se parte de las siguientes expresiones generales de velocidades angulares para dos sistemas de referencia genéricos $\{\mathcal{A}\}$ y $\{\mathcal{C}\}$:

$$\begin{aligned}
{}^{(\mathcal{C})}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{A}} &= {}^{(\mathcal{C})}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}} + {}^{\mathcal{C}}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{A}} \\
\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{A}} &= {}^{\mathcal{I}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}} {}^{(\mathcal{C})}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}} + {}^{\mathcal{I}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}} {}^{\mathcal{C}}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{A}}
\end{aligned}$$

La primera de las expresiones define la velocidad angular del sistema de referencia $\{\mathcal{A}\}$ con respecto al sistema de referencia inercial, expresado en ejes del sistema $\{\mathcal{C}\}$, ${}^{(\mathcal{C})}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{A}}$, mientras que la segunda de las expresiones define la velocidad angular del sistema de referencia $\{\mathcal{A}\}$ con respecto al sistema de referencia inercial, expresado en ejes del sistema de referencia inercial, $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{A}}$. Derivando ambas

expresiones por separado se obtiene:

$$\frac{d({}^{\mathcal{C}}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{A}})}{dt} = {}^{\mathcal{C}}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{C}} + {}^{\mathcal{C}}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{A}} \triangleq {}^{\mathcal{C}}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathcal{A}} \quad (2.4)$$

$$\frac{d(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{A}})}{dt} = {}^{\mathcal{T}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}} {}^{\mathcal{C}}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{C}} + {}^{\mathcal{T}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}} {}^{\mathcal{C}}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}} \times ({}^{\mathcal{T}}\mathbf{R}_{\mathcal{C}} {}^{\mathcal{C}}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{A}}) \quad (2.5)$$

Si ahora se expresa la ecuación (2.5) en ejes del sistema genérico $\{\mathcal{C}\}$:

$${}^{\mathcal{C}}\mathbf{R}_{\mathcal{T}} \frac{d(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{A}})}{dt} = {}^{\mathcal{C}}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{C}} + {}^{\mathcal{C}}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{A}} + ({}^{\mathcal{C}}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}} \times {}^{\mathcal{C}}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{A}}) \triangleq {}^{\mathcal{C}}\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{A}} \quad (2.6)$$

Finalmente se comprueba que las ecuaciones (2.4) y (2.6) no son equivalentes. Además, en este caso se establece la siguiente relación entre ambas:

$${}^{\mathcal{C}}\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{A}} = {}^{\mathcal{C}}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathcal{A}} + ({}^{\mathcal{C}}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}} \times {}^{\mathcal{C}}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{A}})$$

Velocidad y aceleración angulares de la carga

$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{L}} \triangleq {}^{\mathcal{T}}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{L}}$: Velocidad angular inercial de la carga.

${}^{\mathcal{C}}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{L}} \triangleq {}^{\mathcal{L}}({}^{\mathcal{T}}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{L}}) \equiv {}^{\mathcal{L}}\mathbf{R}_{\mathcal{T}} {}^{\mathcal{T}}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{L}}$: Velocidad angular inercial de la carga, expresada en ejes de la carga. Se usará la misma convención que la usada para el quadrotor: movimientos respecto ejes móviles. No obstante, en este caso se omitiría el giro respecto al eje z del sistema de referencia de la carga $\{\mathcal{L}\}$. Así pues, las expresiones quedarían:

$${}^{\mathcal{C}}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{L}} = \mathbf{W}_{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathcal{L}}) \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}_{\mathcal{L}} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{W}_{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathcal{L}}) = \begin{bmatrix} {}^{\mathcal{L}}\mathbf{u}_x, {}^{\mathcal{L}}\mathbf{u}_y, 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\phi_{\mathcal{B}}} & 0 \\ 0 & -s_{\phi_{\mathcal{B}}} & 0 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{L}} \triangleq {}^{\mathcal{T}}\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{L}} = \frac{d({}^{\mathcal{T}}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{L}})}{dt}$: Aceleración angular inercial de la carga.

${}^{\mathcal{C}}\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{L}} \triangleq {}^{\mathcal{L}}({}^{\mathcal{T}}\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{L}})$: Aceleración angular inercial de la carga, expresada en ejes de la carga.

${}^{\mathcal{C}}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathcal{L}} \triangleq \frac{d({}^{\mathcal{C}}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{L}})}{dt} = \dot{\mathbf{W}}_{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathcal{L}}) \dot{\boldsymbol{\eta}}_{\mathcal{L}} + \mathbf{W}_{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathcal{L}}) \ddot{\boldsymbol{\eta}}_{\mathcal{L}}$: Derivada de la velocidad angular absoluta de la carga expresada en ejes de la carga.

2.3.2 Posición, velocidad y aceleración absolutas del quadrotor y la carga

$\mathbf{p}_B \triangleq {}^I\mathbf{p}_B = [x_B, y_B, z_B]^T$: Posición absoluta del centro de masas del cuerpo, expresada en ejes del sistema de referencia inercial.

$\mathbf{v}_B \triangleq {}^I\mathbf{v}_B \equiv {}^I\dot{\mathbf{p}}_B$: Velocidad absoluta del centro de masas del cuerpo, expresada en ejes del propio sistema inercial.

${}^B\mathbf{v}_B \triangleq {}^B({}^I\mathbf{v}_B) \equiv {}^B\mathbf{R}_I {}^I\mathbf{v}_B$: Velocidad absoluta del centro de masas del cuerpo, expresada en ejes del cuerpo.

$\mathbf{a}_B \triangleq {}^I\mathbf{a}_B \equiv \dot{\mathbf{v}}_B$: Aceleración absoluta del cuerpo, expresada en ejes del sistema inercial.

${}^B\mathbf{a}_B \triangleq {}^B({}^I\mathbf{a}_B)$: Aceleración absoluta del cuerpo, expresada en ejes del cuerpo.

${}^B\dot{\mathbf{a}}_B \triangleq \frac{d({}^B\mathbf{v}_B)}{dt}$: Derivada de la velocidad lineal absoluta del cuerpo, expresada en ejes del cuerpo. Es importante recordar que, como ya se explicó anteriormente, ${}^B\dot{\mathbf{a}}_B \neq {}^B\mathbf{a}_B$.

$\mathbf{p}_C \triangleq {}^I\mathbf{p}_C = [x_C, y_C, z_C]^T$: Posición absoluta de la carga, expresada en ejes del sistema inercial.

${}^C\mathbf{p}_B = [0, 0, l]^T$: Posición del origen de $\{B\}$ respecto al origen de $\{C\}$, expresado en los ejes de este último.

$\mathbf{v}_C \triangleq {}^I\mathbf{v}_C \equiv {}^I\dot{\mathbf{p}}_C$: Velocidad absoluta de la carga, expresada en ejes del sistema inercial.

${}^C\mathbf{v}_C \triangleq {}^C({}^I\mathbf{v}_C) \equiv {}^C\mathbf{R}_I {}^I\mathbf{v}_C$: Velocidad absoluta de la carga, expresada en ejes de la carga.

$\mathbf{a}_C \triangleq {}^I\mathbf{a}_C \equiv \dot{\mathbf{v}}_C$: Aceleración absoluta de la carga, expresada en ejes del sistema inercial.

${}^C\mathbf{a}_C \triangleq {}^C({}^I\mathbf{a}_C)$: Aceleración absoluta de la carga, expresada en ejes la carga.

${}^C\dot{\mathbf{a}}_C \triangleq \frac{d({}^C\mathbf{v}_C)}{dt}$: Derivada de la velocidad lineal absoluta de la carga, expresada en ejes de la carga.

2.3.3 Masas e inercias del quadrotor y la carga

m_B : Masa del cuerpo.

m_C : Masa de la carga.

$m = m_B + m_C$: Masa total del sistema.

\mathbf{I}_B : Tensor de inercia del cuerpo, respecto a su centro de masas, expresado en ejes del sistema inercial. No constante.

${}^{(B)}\mathbf{I}_B$: Tensor de inercia del cuerpo, respecto a su centro de masas, expresado en ejes del sistema del cuerpo. Constante bajo la suposición de sólido-rígido (hipótesis que se tomará en el desarrollo de las ecuaciones del sistema), [28]. Bajo esta hipótesis, las componentes de la matriz de inercia ${}^{(B)}\mathbf{I}_B$ serán:

$${}^{(B)}\mathbf{I}_B = {}^B\mathbf{R}_I \mathbf{I}_B {}^I\mathbf{R}_B = \begin{bmatrix} {}^{(B)}I_B^{xx} & 0 & 0 \\ 0 & {}^{(B)}I_B^{yy} & 0 \\ 0 & 0 & {}^{(B)}I_B^{zz} \end{bmatrix}$$

\mathbf{I}_C : Tensor de inercia de la carga, respecto a su centro de masas, expresado en ejes del sistema inercial. No constante.

${}^{(C)}\mathbf{I}_C$: Tensor de inercia de la carga, respecto a su centro de masas, expresado en ejes de su propio sistema de referencia. Constante y nula bajo la suposición de masa puntual (hipótesis que se tomará en el desarrollo de las ecuaciones del sistema).

${}^{(B)}\mathbf{I}$: Matriz de inercia del sistema completo, tomada en el origen de $\{\mathcal{B}\}$ y expresada en sus ejes. Dicha inercia tiene por expresión:

$${}^{(B)}\mathbf{I} = {}^{(B)}\mathbf{I}_B + {}^{(B)}\mathbf{I}_C - m_C \mathbf{S}({}^B\mathbf{p}_C)^2 = {}^{(B)}\mathbf{I}_B - m_C \mathbf{S}({}^B\mathbf{p}_C)^2 \quad (2.8)$$

2.3.4 Fuerzas y pares sobre el quadrotor y la carga

\mathbf{f}_B : Fuerza total actuando sobre el centro de masas del cuerpo, expresada en ejes del sistema inercial.

$\mathbf{f}_B^g = [0, 0, -m_B g]^\top$: Fuerzas gravitatorias actuando sobre el cuerpo, expresadas en ejes del sistema inercial.

\mathbf{f}_C : Fuerza total actuando sobre la carga, expresada en ejes del sistema inercial.

$\mathbf{f}_C^g = [0, 0, -m_C g]^\top$: Fuerzas gravitatorias actuando sobre la carga, expresadas en ejes del sistema inercial.

$\mathbf{f}_C^a = -\mathbf{v}_C \|\mathbf{v}_C\| c_D$: Fuerza de fricción aerodinámica actuando sobre la carga, expresada en ejes del sistema inercial, [3]. No se corresponde exactamente con los modelos de fuerzas aerodinámicas usados en aeronáutica, pero resulta de utilidad para el estudio realizado en este documento.

$\mathbf{f}_B^c = -\mathbf{f}_C^B$: Fuerza de interacción que ejerce la carga sobre el cuerpo, expresada en ejes del sistema inercial. Es igual a la fuerza de interacción que ejerce el cuerpo sobre la carga, expresada en ejes del sistema inercial, pero de sentido contrario.

${}^{\mathcal{L}}\mathbf{f}_C^{\mathcal{B}}$: Fuerza de interacción, que ejerce el cuerpo sobre la carga, expresada en ejes del sistema de referencia de la carga.

$\mathbf{f}_B^T = {}^{\mathcal{I}}\mathbf{R}_B \cdot [0, 0, f]^T$: Fuerzas propulsivas actuando sobre el cuerpo, expresadas en ejes del sistema inercial. f representa la fuerza de empuje total o “*thrust*” de los rotores del quadrotor.

τ_B : Par total actuando sobre el cuerpo, expresado en ejes del sistema inercial.

${}^{(\mathcal{B})}\tau_B \triangleq {}^{\mathcal{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{I}} \tau_B$: Par total actuando sobre el cuerpo, expresado en los ejes del cuerpo.

${}^{(\mathcal{B})}\tau_B^T = [{}^{(\mathcal{B})}\tau_{B,\hat{x}}, {}^{(\mathcal{B})}\tau_{B,\hat{y}}, {}^{(\mathcal{B})}\tau_{B,\hat{z}}]$: Pares propulsivos actuando sobre el cuerpo, expresados en los ejes del cuerpo. Estos pares están provocados por la diferencia de fuerzas de los rotores dos a dos, tal y como se explicó en el capítulo anterior, (2.1).

τ_C : Par total actuando sobre la carga, expresado en ejes del sistema inercial.

${}^{(\mathcal{L})}\tau_C \triangleq {}^{\mathcal{L}}\mathbf{R}_{\mathcal{I}} \tau_C$: Par total actuando sobre la carga, expresado en ejes de la carga.

${}^{(\mathcal{L})}\tau_C^{\mathcal{B}}$: Par de interacción que provoca el cuerpo sobre la carga, expresado en ejes de la carga. Como se comentará, debido a que se supondrá que no habrá rozamiento en la fricción entre el quadrotor y la cuerda, no existirán pares de interacción entre la carga y el cuerpo.

3 Ecuaciones del movimiento

Tal y como se comentó en la introducción, el enfoque del presente proyecto no es otro que el de tratar de controlar la posición de la carga, en lugar de focalizar el control en la posición del quadrotor, como venía siendo habitual. Para ello, será necesario establecer en primer lugar las ecuaciones del movimiento del sistema en función de las coordenadas de la carga, siendo este el objetivo último del presente capítulo. No obstante, con la intención de mostrar una formulación más intuitiva, se comenzará con la deducción de las ecuaciones de la cinemática y dinámica en coordenadas del cuerpo, para después continuar con la definición de las ecuaciones en coordenadas de la carga. Por otro lado, para evitar usar distintos puntos de referencia según se usen coordenadas cuerpo o carga, en todo momento se usará la carga como punto de referencia para la deducción de las ecuaciones de la dinámica. El formalismo a usar para la deducción de las ecuaciones será el de *Newton-Euler*.

Las hipótesis que se asumirán en el desarrollo de las ecuaciones serán las siguientes:

- Se considerará el quadrotor como un sólido rígido.
- El centro geométrico del quadrotor coincide con su centro de gravedad.
- Se despreciarán los efectos aerodinámicos del quadrotor.
- Se despreciará el efecto giroscópico de los rotores.
- La carga se supondrá como una masa puntual.
- Se considerará una aproximación a los posibles efectos aerodinámicos que afectan a la carga.
- La cuerda que une el quadrotor con la carga se supondrá delgada, no elástica y tensa en todo momento.
- Se supondrá nula la fricción en el punto de contacto entre el quadrotor y la carga.

Cabe también avanzar en este punto que, con el fin de evitar términos de momentos de inercia no constantes en la dinámica (inercias dependientes de la orientación), las fuerzas se expresarán en los

ejes inerciales, mientras que los pares lo harán en los ejes del elemento de estudio. Por tanto, también en la cinemática, las velocidades y aceleraciones absolutas vendrán dadas en los ejes inerciales, mientras que las velocidades y aceleraciones angulares se expresarán en los ejes del elemento en cuestión.

En cuanto a la estructura de esta sección, como ya se ha comentado, se procederá desarrollando las ecuaciones de la cinemática y dinámica del sistema usando una formulación vectorial en coordenadas del cuerpo, para posteriormente realizar un desarrollo análogo de las mismas ecuaciones según las coordenadas de la carga.

3.1 Ecuaciones del movimiento en coordenadas del cuerpo

En esta sección se obtendrán primero las ecuaciones de la cinemática en coordenadas del cuerpo, para posteriormente establecer los equilibrios de fuerzas y pares existentes sobre la carga en coordenadas cuerpo. Como ya se apuntó anteriormente, el punto de referencia para la deducción de las ecuaciones de la dinámica será la carga en todo momento.

3.1.1 Ecuaciones de la cinemática

Para la obtención de las ecuaciones de la cinemática del sistema en coordenadas del cuerpo se supondrán conocidas la posición, velocidad y aceleración absolutas del cuerpo expresadas en el sistema de referencia inercial, \mathbf{p}_B , \mathbf{v}_B y \mathbf{a}_B respectivamente. Faltaría definir la posición, velocidad y aceleración absolutas de la carga expresadas en el sistema inercial, \mathbf{p}_C , \mathbf{v}_C y \mathbf{a}_C , en función de las coordenadas del cuerpo, evitando así la aparición de cualquier coordenada de la carga en las ecuaciones de la dinámica.

La posición absoluta de la carga expresada en el sistema inercial, \mathbf{p}_C , en función de las coordenadas del cuerpo se puede hallar según cualquiera de las siguientes relaciones:

$$\mathbf{p}_C = \mathbf{p}_B + {}^T\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{p}_C = \mathbf{p}_B - {}^T\mathbf{R}_C {}^C\mathbf{p}_B \quad (3.1)$$

De las anteriores, se prefiere la última, la que hace uso de los términos ${}^T\mathbf{R}_C {}^C\mathbf{p}_B$, dada la simplicidad que esta ofrece en los desarrollos vectoriales. El vector de posición resultante de estos términos depende únicamente del ángulo de la carga respecto del sistema inercial, y no de una relación entre el ángulo de la carga respecto del sistema inercial y el ángulo del quadrotor respecto del sistema inercial para la obtención de ${}^B\mathbf{p}_C$.

Derivando respecto del tiempo la expresión (3.1) elegida, las velocidades y aceleraciones absolutas de la carga en función de las coordenadas del cuerpo quedarían:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B - {}^T\mathbf{R}_C \left[{}^{(C)}\boldsymbol{\omega}_C \times {}^C\mathbf{p}_B \right] \quad (3.2)$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B - {}^T\mathbf{R}_C \left[{}^{(C)}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_C \times {}^C\mathbf{p}_B + {}^{(C)}\boldsymbol{\omega}_C \times \left({}^{(C)}\boldsymbol{\omega}_C \times {}^C\mathbf{p}_B \right) \right] \quad (3.3)$$

Prestando atención a las ecuaciones anteriores, y como era de esperar, será necesario conocer las velocidades y aceleraciones angulares de la carga expresadas en ejes de la propia carga. Puesto que por coordenadas del cuerpo o de la carga se entienden las coordenadas espaciales de los mismos ($[x_B, y_B, z_B]$ y $[x_C, y_C, z_C]$ respectivamente), y no a la actitud del cuerpo o de la carga, no será necesario definir las velocidades y aceleraciones angulares de la carga en función de las velocidades y aceleraciones angulares del cuerpo. Por tanto, se supondrán conocidas tanto las velocidades y aceleraciones angulares del cuerpo expresadas en ejes del propio cuerpo, ${}^B\omega_B$ y ${}^B\dot{\alpha}_B$ respectivamente, como las velocidades y aceleraciones angulares de la carga expresadas en ejes de la propia carga, ${}^C\omega_C$ y ${}^C\dot{\alpha}_C$ respectivamente. No obstante, y a modo curiosidad, se establecen las siguientes relaciones entre las velocidades y aceleraciones angulares de la carga y del cuerpo:

$${}^C\omega_C = {}^C R_B ({}^B\omega_B + {}^B\omega_C) \quad (3.4)$$

$${}^C\dot{\alpha}_C = \frac{d({}^C\omega_C)}{dt} = {}^C R_B ({}^B\dot{\alpha}_B + {}^B\alpha_C + {}^B\omega_B \times {}^B\omega_C) \quad (3.5)$$

Estas relaciones flexibilizarían el problema en su puesta en práctica: se podría hallar ${}^C\omega_C$ y ${}^C\dot{\alpha}_C$ a través de sensores colocados en el cuerpo, sin necesidad de colocar ningún sensor sobre la carga. Sin embargo, se vuelve a remarcar que en el presente proyecto se desarrollarán las ecuaciones considerando directamente ${}^C\omega_C$ y ${}^C\dot{\alpha}_C$.

Conviene recordar aquí la diferencia entre ${}^C\dot{\alpha}_C$ y ${}^C\alpha_C$, ya comentada en la Subsección 2.3.1:

$$\begin{aligned} {}^C\dot{\alpha}_C &= \frac{d({}^C\omega_C)}{dt} \\ {}^C\alpha_C &= {}^C R_T \frac{d(\omega_C)}{dt} \end{aligned}$$

3.1.2 Ecuaciones de la dinámica

Una vez definidas las expresiones de la cinemática en coordenadas del cuerpo, se procede a la definición de los equilibrios de fuerzas y pares sobre la carga en coordenadas cuerpo.

Equilibrio de fuerzas

El equilibrio de fuerzas en la carga vendría dado por la suma de las fuerzas gravitatorias sobre la misma, de fricción aerodinámica sobre la carga, y la fuerza que ejercería el quadrotor sobre la carga:

$$f_C = m_C {}^C a_C = f_C^g + f_C^a + f_C^B \quad (3.6)$$

La fuerza que ejerce el quadrotor sobre la carga, f_C^B , se puede hallar del equilibrio de fuerzas en el cuerpo. Dicho equilibrio se compone de la suma de las fuerzas gravitatorias sobre el quadrotor, de las fuerzas propulsivas, y de la fuerza que la carga ejerce sobre el quadrotor, que es igual, pero

de signo contrario, a la fuerza que ejerce el quadrotor sobre la carga (suponiendo ambas expresadas en ejes inerciales):

$$\mathbf{f}_B = m_B {}^I\mathbf{a}_B = \mathbf{f}_B^g + \mathbf{f}_B^T - \mathbf{f}_C^B \quad (3.7)$$

Despejando \mathbf{f}_C^B de (3.7), y substituyendo en (3.6), se llega a la expresión del equilibrio de fuerzas sobre la carga que depende de las fuerzas propulsivas del quadrotor (actuadores):

$$\mathbf{f}_B^T = m_C {}^I\mathbf{a}_C + m_B {}^I\mathbf{a}_B - \mathbf{f}_C^g - \mathbf{f}_C^a - \mathbf{f}_B^g \quad (3.8)$$

Si en la ecuación anterior se desarrolla la expresión de la aceleración absoluta de la carga obtenida en (3.3), \mathbf{a}_C , se llega al equilibrio de fuerzas sobre la carga en función de las coordenadas del cuerpo:

$$\mathbf{f}_B^T = \mathbf{a}_B (m_C + m_B) - m_C {}^I\mathbf{R}_C \left[{}^{(\mathcal{L})}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_C \times {}^C\mathbf{p}_B + {}^{(\mathcal{L})}\boldsymbol{\omega}_C \times ({}^{(\mathcal{L})}\boldsymbol{\omega}_C \times {}^C\mathbf{p}_B) \right] - \mathbf{f}_C^g - \mathbf{f}_C^a - \mathbf{f}_B^g$$

En cuanto a la fuerza de fricción aerodinámica sobre la carga que aparece en la ecuación anterior, \mathbf{f}_C^a , esta puede expresarse en coordenadas del cuerpo si se considera la expresión de la velocidad de la carga en función de las coordenadas del cuerpo de la ecuación (3.2), \mathbf{v}_C , tal y como se muestra a continuación:

$$\mathbf{f}_C^a = -\mathbf{v}_C \|\mathbf{v}_C\| c_D = -(\mathbf{v}_B - {}^I\mathbf{R}_C [{}^{(\mathcal{L})}\boldsymbol{\omega}_C \times {}^C\mathbf{p}_B]) \|\mathbf{v}_C\| c_D \quad (3.9)$$

El término $\|\mathbf{v}_C\|$ es un escalar, razón por la que no merece la pena su desarrollo según (3.2).

Por último, teniendo en cuenta las propiedades de las matrices antisimétricas y los productos vectoriales, la ecuación del equilibrio de fuerzas podría reescribirse según la siguiente formulación:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_B^T = \mathbf{a}_B (m_C + m_B) - \\ - m_C {}^I\mathbf{R}_C \left[-\mathbf{S}({}^C\mathbf{p}_B) {}^{(\mathcal{L})}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_C + {}^{(\mathcal{L})}\boldsymbol{\omega}_C \times ({}^{(\mathcal{L})}\boldsymbol{\omega}_C \times {}^C\mathbf{p}_B) \right] - \mathbf{f}_C^g - \mathbf{f}_C^a - \mathbf{f}_B^g \end{aligned} \quad (3.10)$$

Equilibrio de pares

A continuación se desarrollará el equilibrio de pares actuando sobre la carga en coordenadas del cuerpo. Se tomará como punto de referencia el CG de la propia carga, y se expresará en los ejes de la propia carga por analogía al procedimiento usual del equilibrio de pares sobre el cuerpo de una aeronave. De esta manera se evitan términos inerciales no constantes y dependientes de la orientación.

Como ya es conocido, la expresión del equilibrio de pares procede de la derivada temporal del

momento angular del objeto en cuestión respecto a su CG, L_i . A través de las ecuaciones (3.11) y (3.12) se deduce el equilibrio de pares actuando sobre la carga, respecto de la propia carga, expresado en ejes absolutos o inerciales, [28]. Para ello se ha preferido expresar el momento angular de la carga, expresado en ejes inerciales, L_c , en función del tensor de inercia de la carga expresado en ejes de la propia carga, ${}^{(c)}I_c$, en lugar de usar el tensor de inercia de la carga expresado en ejes inerciales, I_c . Con esta modificación se consigue una derivada del tensor de inercia nula, ya que el tensor ${}^{(c)}I_c$ está compuesto por elementos constantes, mientras que I_c depende de la orientación de la carga.

$$L_c = I_c \cdot \omega_c = {}^T R_c {}^{(c)}I_c {}^c R_c \cdot {}^T R_c {}^{(c)}\omega_c = {}^T R_c {}^{(c)}I_c {}^{(c)}\omega_c \quad (3.11)$$

$$\tau_c = \frac{d(L_c)}{dt} = {}^T R_c {}^{(c)}I_c {}^{(c)}\dot{\alpha}_c + \omega_c \times ({}^T R_c {}^{(c)}I_c {}^{(c)}\omega_c) \quad (3.12)$$

Si la relación anterior se expresa en los ejes de la carga, por analogía al procedimiento usual del equilibrio de pares sobre el cuerpo, desaparecen las matrices de rotación de (3.12):

$${}^{(c)}\tau_c = {}^{(c)}I_c {}^{(c)}\dot{\alpha}_c + {}^{(c)}\omega_c \times ({}^{(c)}I_c {}^{(c)}\omega_c) = 0 \quad (3.13)$$

El resultado nulo se debe al término inercial de la carga. Puesto que se supone como una masa puntual, sea cual sea el sistema de referencia tomado y siempre que este sistema se encuentre situado en la propia carga, el tensor de inercia es nulo. Si, por contra, se hubiese analizado el equilibrio de pares sobre la carga en el punto de unión entre la carga y el quadrotor, expresado en ejes de la propia carga, el tensor de inercia de la carga no sería nulo, apareciendo términos inerciales del tipo $-m_c S({}^c p_c)^2$. No obstante, en ambos casos se llegaría a la misma expresión final del equilibrio de pares actuando sobre la carga, (3.16). Aún así, y como ya se ha venido comentando, se analizará este equilibrio de pares tomando como punto de referencia la carga, expresados en ejes de la propia carga.

Por otro lado, se sabe que los pares que actúan sobre la carga ${}^{(c)}\tau_c$ son debidos a la interacción entre la carga y el cuerpo, y a las fuerzas que generan momento:

$${}^{(c)}\tau_c = {}^{(c)}\tau_c^B + ({}^c p_c \times {}^{(c)}f_c^B) \quad (3.14)$$

Dado el tipo de unión entre la carga y el quadrotor, no existen pares de interacción entre ambos, por lo que: ${}^{(c)}\tau_c^B = 0$. De esta manera, igualando las dos expresiones anteriores de ${}^{(c)}\tau_c$, (3.13) y (3.14), la expresión completa del equilibrio de pares actuando sobre la carga se ve reducida a la siguiente igualdad:

$$({}^c p_c \times {}^{(c)}f_c^B) = 0$$

Desarrollando, despejando para ello f_c^B de la ecuación del equilibrio de fuerzas en la carga, (3.6), queda:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_c^B &= m_c \mathbf{a}_c - \mathbf{f}_c^g - \mathbf{f}_c^a \\ {}^c\mathbf{p}_B \times ({}^c\mathbf{f}_c^B) &= -({}^c\mathbf{R}_I \mathbf{f}_c^B \times {}^c\mathbf{p}_B) = \left[-{}^c\mathbf{R}_I (m_c \mathbf{a}_c - \mathbf{f}_c^g - \mathbf{f}_c^a) \right] \times {}^c\mathbf{p}_B = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Finalmente, si ahora se substituye \mathbf{a}_c según (3.3), y se reordena según las propiedades de las matrices antisimétricas y productos vectoriales, se llega a la siguiente expresión del equilibrio de pares en la carga en coordenadas del cuerpo:

$$\begin{aligned} S({}^c\mathbf{p}_B) \left[{}^c\mathbf{R}_I (m_c \mathbf{a}_c - \mathbf{f}_c^g - \mathbf{f}_c^a) \right] &= S({}^c\mathbf{p}_B) \left[m_c \left[{}^c\mathbf{R}_I \mathbf{a}_B - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(-S({}^c\mathbf{p}_B) ({}^c\dot{\boldsymbol{\alpha}}_c + ({}^c\boldsymbol{\omega}_c \times ({}^c\boldsymbol{\omega}_c \times {}^c\mathbf{p}_B)) \right) \right] - {}^c\mathbf{R}_I (\mathbf{f}_c^g + \mathbf{f}_c^a) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Se recuerda que la expresión de \mathbf{f}_c^a en coordenadas del cuerpo ya fue mostrada en (3.9).

3.2 Ecuaciones del movimiento en coordenadas de la carga

Una vez halladas las ecuaciones de la cinemática y de la dinámica del sistema expresadas en coordenadas del cuerpo, resulta inmediato obtener las mismas expresiones en coordenadas de la carga. Bastaría con reordenar términos y realizar unos pocos desarrollos matemáticos, tal y como se verá a continuación.

3.2.1 Ecuaciones de la cinemática

En este caso se supondrán conocidas la posición, velocidad y aceleración absolutas de la carga expresadas en el sistema de referencia inercial, \mathbf{p}_c , \mathbf{v}_c y \mathbf{a}_c respectivamente, debiéndose hallar la posición, velocidad y aceleración del cuerpo expresadas en el sistema de referencia inercial, \mathbf{p}_B , \mathbf{v}_B y \mathbf{a}_B respectivamente, en función de las coordenadas de la carga.

Reordenando la ecuación (3.1) se obtiene la posición del cuerpo expresada en el sistema de referencia inercial en función de las coordenadas de la carga:

$$\mathbf{p}_B = \mathbf{p}_c + {}^I\mathbf{R}_c {}^c\mathbf{p}_B$$

Derivando respecto del tiempo, las velocidades y aceleraciones lineales del cuerpo expresadas en el sistema inercial en función de las coordenadas de la carga quedan:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}v_B &= \mathcal{I}v_C + \mathcal{I}R_C \left[{}^{(C)}\omega_C \times {}^C p_B \right] \\ \mathcal{I}a_B &= \mathcal{I}a_C + \mathcal{I}R_C \left[{}^{(C)}\dot{\alpha}_C \times {}^C p_B + {}^{(C)}\omega_C \times ({}^{(C)}\omega_C \times {}^C p_B) \right]\end{aligned}\quad (3.17)$$

Como ya se explicó en la deducción de las ecuaciones de la cinemática en coordenadas del cuerpo, las velocidades y aceleraciones angulares de la carga expresadas en los ejes de la carga, ${}^{(C)}\omega_C$ y ${}^{(C)}\dot{\alpha}_C$, y las velocidades y aceleraciones angulares del cuerpo expresadas en los ejes del cuerpo, ${}^{(B)}\omega_B$ y ${}^{(B)}\dot{\alpha}_B$, se suponen conocidas.

3.2.2 Ecuaciones de la dinámica

Equilibrio de fuerzas

Partiendo de la ecuación del equilibrio de fuerzas en la carga (3.8), y teniendo en cuenta la expresión de $\mathcal{I}a_B$ en función de las coordenadas de la carga de (3.17), la expresión del equilibrio de fuerzas en la carga en coordenadas de la propia carga toma la forma:

$$f_B^r = a_C (m_C + m_B) + m_B \mathcal{I}R_C \left[{}^{(C)}\dot{\alpha}_C \times {}^C p_B + {}^{(C)}\omega_C \times ({}^{(C)}\omega_C \times {}^C p_B) \right] - f_C^g - f_C^a - f_B^g$$

Que sería equivalente a expresarlo según sigue:

$$\begin{aligned}f_B^r &= a_C (m_C + m_B) + \\ &+ m_B \mathcal{I}R_C \left[-S({}^C p_B) {}^{(C)}\dot{\alpha}_C + {}^{(C)}\omega_C \times ({}^{(C)}\omega_C \times {}^C p_B) \right] - f_C^g - f_C^a - f_B^g\end{aligned}\quad (3.18)$$

En este caso, la fuerza de resistencia aerodinámica sobre la carga en coordenadas de la propia carga quedaría definida según la primera igualdad de (3.9):

$$f_C^a = -v_C \|v_C\| c_D \quad (3.19)$$

Equilibrio de pares

Por su parte, el equilibrio de pares en la carga expresado en coordenadas de la propia carga ya fue definido en (3.15):

$$S({}^C p_B) \left[{}^C R_C (m_C a_C - f_C^g - f_C^a) \right] = 0 \quad (3.20)$$

Al igual que para el equilibrio de fuerzas, la fuerza de resistencia aerodinámica sobre la carga en coordenadas de la propia carga se define según (3.19).

3.3 Resumen de las ecuaciones del movimiento

Agrupando las ecuaciones deducidas anteriormente que definen el movimiento del sistema de manera parcial, ecuaciones (3.10), (3.16), (3.18) y (3.20), se tienen los siguientes dos grupos de ecuaciones, dependiendo de si están expresadas en coordenadas del quadrotor, (3.21), o de la carga, (3.22):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f}_B^T = \mathbf{a}_B (m_L + m_B) - \\ \quad - m_L {}^T\mathbf{R}_L \left[-S({}^L\mathbf{p}_B) ({}^L\dot{\boldsymbol{\alpha}}_L + {}^L\boldsymbol{\omega}_L \times ({}^L\boldsymbol{\omega}_L \times {}^L\mathbf{p}_B)) \right] - \mathbf{f}_L^g - \mathbf{f}_L^a - \mathbf{f}_B^g \\ S({}^L\mathbf{p}_B) \left[m_L \left[{}^L\mathbf{R}_L \mathbf{a}_B - \left(-S({}^L\mathbf{p}_B) ({}^L\dot{\boldsymbol{\alpha}}_L + {}^L\boldsymbol{\omega}_L \times ({}^L\boldsymbol{\omega}_L \times {}^L\mathbf{p}_B)) \right) \right] - \right. \\ \quad \left. - {}^L\mathbf{R}_L (\mathbf{f}_L^g + \mathbf{f}_L^a) \right] = 0 \\ \mathbf{f}_L^a = -(\mathbf{v}_B - {}^T\mathbf{R}_L [{}^L\boldsymbol{\omega}_L \times {}^L\mathbf{p}_B]) \| \mathbf{v}_L \| c_D \end{array} \right. \quad (3.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f}_B^T = \mathbf{a}_L (m_L + m_B) + \\ \quad + m_B {}^T\mathbf{R}_L \left[-S({}^L\mathbf{p}_B) ({}^L\dot{\boldsymbol{\alpha}}_L + {}^L\boldsymbol{\omega}_L \times ({}^L\boldsymbol{\omega}_L \times {}^L\mathbf{p}_B)) \right] - \mathbf{f}_L^g - \mathbf{f}_L^a - \mathbf{f}_B^g \\ S({}^L\mathbf{p}_B) \left[{}^L\mathbf{R}_L (m_L \mathbf{a}_L - \mathbf{f}_L^g - \mathbf{f}_L^a) \right] = 0 \\ \mathbf{f}_L^a = -\mathbf{v}_L \| \mathbf{v}_L \| c_D \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Como se ha mencionado, los anteriores grupos de ecuaciones no definen completamente el movimiento del sistema. Faltaría por añadir la ecuación que establece la relación entre los ángulos del quadrotor, y el causante de la variación de los mismos. Es decir, faltaría por añadir la expresión del equilibrio de pares en el quadrotor.

Así pues, de manera análoga a (3.13), suponiendo el CG situado en el centro geométrico del quadrotor, el equilibrio de pares del quadrotor expresado en ejes del cuerpo quedaría:

$${}^{(B)}\boldsymbol{\tau}_B = {}^{(B)}\mathbf{I}_B {}^{(B)}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_B + {}^{(B)}\boldsymbol{\omega}_B \times ({}^{(B)}\mathbf{I}_B {}^{(B)}\boldsymbol{\omega}_B) \quad (3.23)$$

Por otro lado, las fuerzas que actúan sobre el quadrotor, (3.7), no generan momento, ya que todas ellas se suponen aplicadas en su centro geométrico, coincidente al mismo tiempo con su CG. Además, como ya se apuntó anteriormente, dado el tipo de unión entre la carga y el quadrotor, no existen pares de interacción entre ambos. Por consiguiente, el equilibrio de pares actuando sobre el

quadrotoz quedaría totalmente definido con la ecuación (3.23). Se recuerda que ${}^{\mathcal{B}}\tau_B$ ya fue definido al inicio de este documento, (2.1).

Finalmente, con (3.21) y (3.23), o alternativamente con (3.22) y (3.23), se tiene definido completamente por ecuaciones el movimiento del sistema en coordenadas del quadrotoz y de la carga respectivamente.

4 Ecuaciones matriciales y linealización

En este capítulo se trasladarán las ecuaciones del movimiento obtenidas en el capítulo anterior a través del formalismo de *Newton-Euler* al formato matricial, facilitando así su uso y manejo en el desarrollo de los algoritmos de control, así como en los simuladores. Para ello, se tendrá en cuenta el formato de *Lagrange-Euler*, [29]:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) \\ \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q})\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde se recuerda que \mathbf{M} es la matriz de inercia o de masas, \mathbf{C} la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, \mathbf{F} la matriz de fuerzas disipativas, y \mathbf{G} la matriz de fuerzas gravitatorias.

Las ecuaciones matriciales serán obtenidas en coordenadas cuerpo y coordenadas carga, y serán desarrolladas vectorialmente para el caso 2D. Conviene recordar que el motivo de mostrar los desarrollos en coordenadas cuerpo es puramente didáctico. De esta manera se pretende aportar una visión más intuitiva, pudiendo el lector comparar las expresiones de ambos casos.

El guión a seguir será el siguiente: se comenzará con la transformación de las ecuaciones del movimiento en coordenadas cuerpo y carga al formato matricial. Seguidamente se desarrollarán los vectores para 2D tanto en coordenadas cuerpo como en coordenadas carga. Por último, se deducirán los modelos linealizados y se hallarán las funciones de transferencia correspondientes para 2D. Como curiosidad, los desarrollos para 3D quedan relegados al apéndice A.

4.1 Ecuaciones matriciales generales

En los siguientes apartados se trasladarán las ecuaciones del movimiento en coordenadas cuerpo y coordenadas carga, sin desarrollar vectorialmente, al formato matricial según (4.1). No obstante, el vector de fuerzas generalizadas será común en ambos casos:

$$\boldsymbol{\tau} = [\mathbf{f}_B^T; {}^{(\mathcal{L})}\boldsymbol{\tau}_L; {}^{(\mathcal{B})}\boldsymbol{\tau}_B]$$

4.1.1 Coordenadas del cuerpo

El vector de coordenadas generalizadas a usar para el caso de las ecuaciones del movimiento en coordenadas cuerpo será:

$$\mathbf{q} = [\mathbf{p}_B; \boldsymbol{\eta}_L; \boldsymbol{\eta}_B]$$

Sin embargo, no se usarán sus derivadas directas para esta definición general de las ecuaciones matriciales. Para la primera derivada del vector de coordenadas generalizadas se usará $[\mathbf{v}_B, {}^{(\mathcal{L})}\boldsymbol{\omega}_L, {}^{(\mathcal{B})}\boldsymbol{\omega}_B]$, y la derivada de este como segunda derivada del vector de coordenadas generalizadas, $[\mathbf{a}_B, {}^{(\mathcal{L})}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_L, {}^{(\mathcal{B})}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_B]$. A estos vectores se les llamará vectores auxiliares derivados de coordenadas generalizadas ó $\dot{\mathbf{q}}_a$ y $\ddot{\mathbf{q}}_a$:

$$\dot{\mathbf{q}}_a = [\mathbf{v}_B; {}^{(\mathcal{L})}\boldsymbol{\omega}_L; {}^{(\mathcal{B})}\boldsymbol{\omega}_B]$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_a = [\mathbf{a}_B; {}^{(\mathcal{L})}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_L; {}^{(\mathcal{B})}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_B]$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (3.21) y (3.23), y reordenandolas, las matrices de inercia, de fuerzas centrífugas, de Coriolis y de fuerzas disipativas, y de fuerzas gravitatorias según la ecuación (4.1) en función de las coordenadas del cuerpo quedarían:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} m \mathbb{I}_{3 \times 3} & m_L {}^{\mathcal{I}}\mathbf{R}_L \mathbf{S}({}^{\mathcal{L}}\mathbf{p}_B) & \mathbb{O}_{3 \times 3} \\ m_L \mathbf{S}({}^{\mathcal{L}}\mathbf{p}_B) {}^{\mathcal{L}}\mathbf{R}_L & m_L (\mathbf{S}({}^{\mathcal{L}}\mathbf{p}_B))^2 & \mathbb{O}_{3 \times 3} \\ \mathbb{O}_{3 \times 3} & \mathbb{O}_{3 \times 3} & {}^{(\mathcal{B})}\mathbf{I}_B \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\nu}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_a) &= \begin{bmatrix} -m_L {}^{\mathcal{I}}\mathbf{R}_L ({}^{(\mathcal{L})}\boldsymbol{\omega}_L \times ({}^{(\mathcal{L})}\boldsymbol{\omega}_L \times {}^{\mathcal{L}}\mathbf{p}_B)) - \mathbf{f}_L^a \\ -m_L \mathbf{S}({}^{\mathcal{L}}\mathbf{p}_B) ({}^{(\mathcal{L})}\boldsymbol{\omega}_L \times ({}^{(\mathcal{L})}\boldsymbol{\omega}_L \times {}^{\mathcal{L}}\mathbf{p}_B)) - \mathbf{S}({}^{\mathcal{L}}\mathbf{p}_B) {}^{\mathcal{L}}\mathbf{R}_L \mathbf{f}_L^a \\ {}^{(\mathcal{B})}\boldsymbol{\omega}_B \times ({}^{(\mathcal{B})}\mathbf{I}_B {}^{(\mathcal{B})}\boldsymbol{\omega}_B) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -\mathbf{f}_L^g - \mathbf{f}_B^g \\ -\mathbf{S}({}^{\mathcal{L}}\mathbf{p}_B) {}^{\mathcal{L}}\mathbf{R}_L \mathbf{f}_L^g \\ \mathbb{O}_{3 \times 1} \end{bmatrix}$$

4.1.2 Coordenadas de la carga

En este caso, el vector de coordenadas generalizadas y los vectores auxiliares derivados de coordenadas generalizadas serán:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= [\mathbf{p}_L; \boldsymbol{\eta}_L; \boldsymbol{\eta}_B] \\ \dot{\mathbf{q}}_a &= [\mathbf{v}_L; {}^{(L)}\boldsymbol{\omega}_L; {}^{(B)}\boldsymbol{\omega}_B] \\ \ddot{\mathbf{q}}_a &= [\mathbf{a}_L; {}^{(L)}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_L; {}^{(B)}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_B] \end{aligned}$$

Partiendo de las ecuaciones del movimiento del sistema en coordenadas de la carga, (3.22) y (3.23), y reordenandolas, la matrices correspondientes a la ecuación (4.1) en coordenadas de la carga quedarían:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} m \mathbb{I}_{3 \times 3} & -m_B {}^T\mathbf{R}_L \mathbf{S}({}^L\mathbf{p}_B) & \mathbb{O}_{3 \times 3} \\ m_L \mathbf{S}({}^L\mathbf{p}_B) {}^L\mathbf{R}_T & \mathbb{O}_{3 \times 3} & \mathbb{O}_{3 \times 3} \\ \mathbb{O}_{3 \times 3} & \mathbb{O}_{3 \times 3} & {}^{(B)}\mathbf{I}_B \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_a) &= \begin{bmatrix} m_B {}^T\mathbf{R}_L \left({}^{(L)}\boldsymbol{\omega}_L \times \left({}^{(L)}\boldsymbol{\omega}_L \times {}^L\mathbf{p}_B \right) \right) - \mathbf{f}_L^a \\ - \mathbf{S}({}^L\mathbf{p}_B) {}^L\mathbf{R}_T \mathbf{f}_L^a \\ {}^{(B)}\boldsymbol{\omega}_B \times \left({}^{(B)}\mathbf{I}_B {}^{(B)}\boldsymbol{\omega}_B \right) \end{bmatrix} \quad (4.3) \\ \mathbf{G}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} -\mathbf{f}_L^g - \mathbf{f}_B^g \\ -\mathbf{S}({}^L\mathbf{p}_B) {}^L\mathbf{R}_T \mathbf{f}_L^g \\ \mathbb{O}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.2 Desarrollo vectorial en 2D

Para la particularización de las ecuaciones matriciales anteriores al caso 2D se tendrán en cuenta únicamente los movimientos del quadrotor dentro del plano " $\hat{x}_T - \hat{z}_T$ " del sistema de referencia inercial.

Bajo la anterior suposición, los vectores de las fuerzas propulsivas y pares quedarían reducidos a las siguientes expresiones:

$$\mathbf{f}_B^T = {}^I\mathbf{R}_B \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f s_{\theta_B} \\ 0 \\ f c_{\theta_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ 0 \\ f_z \end{bmatrix}$$

$${}^{(L)}\boldsymbol{\tau}_L = \begin{bmatrix} 0 \\ {}^{(L)}\tau_{L,y} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^{(B)}\boldsymbol{\tau}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ a(f_1 - f_3) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ {}^{(B)}\tau_{B,\hat{y}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde, ${}^{(L)}\tau_{L,y} = 0$ según se vió en (3.13).

El vector de fuerzas generalizadas estaría definido, por tanto, según sigue:

$$\boldsymbol{\tau} = [f_x, 0, f_z, 0, {}^{(L)}\tau_{L,y}, 0, 0, {}^{(B)}\tau_{B,\hat{y}}, 0]^T$$

Por otra parte, se tendrán los siguientes desarrollos vectoriales para las velocidades y aceleraciones angulares del quadrotor y de la carga:

$${}^{(B)}\boldsymbol{\omega}_B = [0, \dot{\theta}_B, 0]^T; \quad {}^{(B)}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_B = [0, \ddot{\theta}_B, 0]^T$$

$${}^{(L)}\boldsymbol{\omega}_L = [0, \dot{\theta}_L, 0]^T; \quad {}^{(L)}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_L = [0, \ddot{\theta}_L, 0]^T$$

Como se puede observar, en la particularización a 2D no se distingue entre movimientos angulares del cuerpo o la carga respecto ejes móviles o fijos, quedando esta distinción únicamente reservada al caso 3D.

4.2.1 Coordenadas del cuerpo

El vector de coordenadas generalizadas para las ecuaciones matriciales en coordenadas del cuerpo en 2D es:

$$\mathbf{q} = [x_B, 0, z_B, 0, \theta_L, 0, 0, \theta_B, 0]^T$$

No obstante, se eliminarán las filas de ceros, preservando únicamente las variables de interés. Así pues, los vectores de coordenadas y fuerzas generalizadas quedan finalmente:

$$\mathbf{q} = [x_{\mathcal{B}}, z_{\mathcal{B}}, \theta_{\mathcal{L}}, \theta_{\mathcal{B}}]^{\top}; \quad \boldsymbol{\tau} = [f_x, f_y, {}^{(\mathcal{L})}\tau_{\mathcal{L},y}, {}^{(\mathcal{B})}\tau_{\mathcal{B},\dot{y}}]^{\top}$$

Desarrollando los vectores de las matrices (4.2), tras algunas operaciones y suponiendo movimientos únicamente en el plano " $\hat{x}_{\mathcal{L}} - \hat{z}_{\mathcal{L}}$ " del sistema de referencia inercial, se llega a las siguientes matrices:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m & 0 & -l m_{\mathcal{L}} c_{\theta_{\mathcal{L}}} & 0 \\ 0 & m & l m_{\mathcal{L}} s_{\theta_{\mathcal{L}}} & 0 \\ m_{\mathcal{L}} c_{\theta_{\mathcal{L}}} & -m_{\mathcal{L}} s_{\theta_{\mathcal{L}}} & -l m_{\mathcal{L}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{yy} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} l m_{\mathcal{L}} \dot{\theta}_{\mathcal{L}}^2 s_{\theta_{\mathcal{L}}} + c_D \|\mathbf{v}_{\mathcal{L}}\| (\dot{x}_{\mathcal{B}} - l \dot{\theta}_{\mathcal{L}} c_{\theta_{\mathcal{L}}}) \\ l m_{\mathcal{L}} \dot{\theta}_{\mathcal{L}}^2 c_{\theta_{\mathcal{L}}} + c_D \|\mathbf{v}_{\mathcal{L}}\| (\dot{z}_{\mathcal{B}} + l \dot{\theta}_{\mathcal{L}} s_{\theta_{\mathcal{L}}}) \\ -c_D \|\mathbf{v}_{\mathcal{L}}\| (l \dot{\theta}_{\mathcal{L}} - \dot{x}_{\mathcal{B}} c_{\theta_{\mathcal{L}}} + \dot{z}_{\mathcal{B}} s_{\theta_{\mathcal{L}}}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ g m \\ -g m_{\mathcal{L}} s_{\theta_{\mathcal{L}}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.2.2 Coordenadas de la carga

El vector de coordenadas generalizadas para las ecuaciones matriciales en coordenadas de la carga en 2D queda:

$$\mathbf{q} = [x_{\mathcal{L}}, 0, z_{\mathcal{L}}, 0, \theta_{\mathcal{L}}, 0, 0, \theta_{\mathcal{B}}, 0]^{\top}$$

De nuevo, eliminando las filas de ceros, preservando únicamente las variables de interés, los vectores de coordenadas y fuerzas generalizadas quedan:

$$\mathbf{q} = [x_{\mathcal{L}}, z_{\mathcal{L}}, \theta_{\mathcal{L}}, \theta_{\mathcal{B}}]^{\top}; \quad \boldsymbol{\tau} = [f_x, f_y, {}^{(\mathcal{L})}\tau_{\mathcal{L},y}, {}^{(\mathcal{B})}\tau_{\mathcal{B},\dot{y}}]^{\top}$$

Desarrollando los vectores de las matrices (4.3), tras algunas operaciones y suponiendo movimientos únicamente en el plano " $\hat{x}_x - \hat{z}_x$ " del sistema de referencia inercial, se consiguen las siguientes matrices:

$$\begin{aligned}
 M(q) &= \begin{bmatrix} m & 0 & l m_B c_{\theta_C} & 0 \\ 0 & m & -l m_B s_{\theta_C} & 0 \\ -m_C c_{\theta_C} & m_C s_{\theta_C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^B I_B^{yy} \end{bmatrix} \\
 v(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} -l m_B \dot{\theta}_C^2 s_{\theta_C} + c_D \dot{x}_C \|v_C\| \\ -l m_B \dot{\theta}_C^2 c_{\theta_C} + c_D \dot{z}_C \|v_C\| \\ -c_D \|v_C\| (\dot{x}_C c_{\theta_C} - \dot{z}_C s_{\theta_C}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.4) \\
 G(q) &= \begin{bmatrix} 0 \\ g m \\ m_C g s_{\theta_C} \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Se ha confirmado que estos resultados coinciden con los obtenidos en [3] a través del formalismo de *Lagrange-Euler*.

4.3 Modelos linealizados: desarrollo 2D

En esta sección se obtendrán los modelos linealizados invariantes en el tiempo (LTI - Linear Time Invariant models) a partir de las ecuaciones matriciales anteriores desarrolladas vectorialmente. Posteriormente se deducirán las transformadas de *Laplace* correspondientes.

La obtención de los modelos lineales se llevará a cabo mediante desarrollos en series de Taylor sobre un punto de operación definido: se considerarán movimientos no bruscos en torno al vuelo estacionario o "hovering", tanto del quadrotor como de la carga. Bajo estas condiciones, se tendrán los siguientes valores constantes de equilibrio para la actitud del quadrotor y de la carga: $\bar{\eta}_B = [\bar{\phi}_B, \bar{\theta}_B, \bar{\psi}_B] = [0, 0, \bar{\psi}_B]$, $\bar{\eta}_C = [\bar{\phi}_C, \bar{\theta}_C, \bar{\psi}_C] = [0, 0, \bar{\psi}_C]$, con $\bar{\psi}_B$ y $\bar{\psi}_C$ valores constantes arbitrarios. Los incrementos sobre el punto de operación se indicarán con el superíndice (δ). Por ejemplo:

$$\theta_B = \bar{\theta}_B + \theta_B^\delta$$

Se avanza en este punto que el término $v(q, \dot{q})$ será nulo tras la linealización de (4.1), puesto que se trata de un término cuadrático de velocidades. Por tanto, se omitirá la matriz de ceros correspondiente durante esta sección.

El vector de fuerzas generalizadas de interés en 2 dimensiones linealizado adoptara la siguiente expresión, tanto para coordenadas cuerpo como para coordenadas carga:

$$\boldsymbol{\tau}^\delta = \begin{bmatrix} f_x^\delta \\ f_z^\delta \\ {}^{(C)}\tau_{\mathcal{L},y}^\delta \\ {}^{(B)}\tau_{B,\dot{y}}^\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m g \theta_B^\delta \\ f^\delta \\ 0 \\ {}^{(B)}\tau_{B,\dot{y}}^\delta \end{bmatrix}$$

Conviene añadir que de aquí en adelante se trabajará con ${}^{(B)}\tau_B$ sin desarrollar según (2.1).

4.3.1 Coordenadas del cuerpo

El vector de coordenadas generalizadas linealizado y sus derivadas en coordenadas del cuerpo, en 2D y considerando únicamente las variables de interés quedarían:

$$\mathbf{q}^\delta = [x_B^\delta, z_B^\delta, \theta_{\mathcal{L}}^\delta, \theta_B^\delta]^\top$$

$$\dot{\mathbf{q}}^\delta = [\dot{x}_B^\delta, \dot{z}_B^\delta, \dot{\theta}_{\mathcal{L}}^\delta, \dot{\theta}_B^\delta]^\top$$

$$\ddot{\mathbf{q}}^\delta = [\ddot{x}_B^\delta, \ddot{z}_B^\delta, \ddot{\theta}_{\mathcal{L}}^\delta, \ddot{\theta}_B^\delta]^\top$$

Las matrices de la dinámica linealizadas en coordenadas del cuerpo en 2 dimensiones quedan:

$$\mathbf{M}^\delta = \begin{bmatrix} m & 0 & -l m_{\mathcal{L}} & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^{(B)}I_B^{yy} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G}^\delta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \theta_{\mathcal{L}}^\delta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y las transformadas de *Laplace* resultantes bajo la suposición de condiciones iniciales nulas:

$$x_B(s) = \frac{g \theta_B(s) \left(s^2 \frac{l}{g} + 1 \right)}{s^2 \left(s^2 \frac{l m_B}{g m} + 1 \right)}; \quad z_B(s) = \frac{f(s)}{m s^2}$$

$$\theta_{\mathcal{L}}(s) = \frac{\theta_B(s)}{\left(s^2 \frac{l m_B}{g m} + 1 \right)}; \quad \theta_B(s) = \frac{{}^{(B)}\tau_{B,\dot{y}}(s)}{{}^{(B)}I_B^{yy} s^2}$$

4.3.2 Coordenadas de la carga

El vector de coordenadas generalizadas linealizado en coordenadas de la carga, y sus derivadas, en 2D y considerando únicamente las variables de interés quedan:

$$\mathbf{q}^\delta = [x_{\mathcal{L}}^\delta, z_{\mathcal{L}}^\delta, \theta_{\mathcal{L}}^\delta, \theta_{\mathcal{B}}^\delta]^\top$$

$$\dot{\mathbf{q}}^\delta = [\dot{x}_{\mathcal{L}}^\delta, \dot{z}_{\mathcal{L}}^\delta, \dot{\theta}_{\mathcal{L}}^\delta, \dot{\theta}_{\mathcal{B}}^\delta]^\top$$

$$\ddot{\mathbf{q}}^\delta = [\ddot{x}_{\mathcal{L}}^\delta, \ddot{z}_{\mathcal{L}}^\delta, \ddot{\theta}_{\mathcal{L}}^\delta, \ddot{\theta}_{\mathcal{B}}^\delta]^\top$$

Las matrices de la dinámica linealizadas en coordenadas de la carga en 2D:

$$\mathbf{M}^\delta = \begin{bmatrix} m & 0 & l m_{\mathcal{B}} & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{yy} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G}^\delta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \theta_{\mathcal{L}}^\delta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Y, del mismo modo que para el caso anterior, se llega a las siguientes expresiones de las transformadas de *Laplace*:

$$\begin{aligned} x_{\mathcal{L}}(s) &= \frac{g \theta_{\mathcal{B}}(s)}{s^2 \left(s^2 \frac{l m_{\mathcal{B}}}{g m} + 1 \right)}; & z_{\mathcal{L}}(s) &= \frac{f(s)}{m s^2} \\ \theta_{\mathcal{B}}(s) &= \frac{{}^{(\mathcal{B})}r_{\mathcal{B},\hat{y}}(s)}{{}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{yy} s^2}; & \theta_{\mathcal{L}}(s) &= \frac{\theta_{\mathcal{B}}(s)}{\left(s^2 \frac{l m_{\mathcal{B}}}{g m} + 1 \right)} \end{aligned} \quad (4.6)$$

4.3.3 Apreciaciones

Comparando las expresiones en coordenadas de la carga y en coordenadas del cuerpo, resulta curioso fijarse en el cero complejo adicional que se presenta para las variables $x_{\mathcal{B}}$ e $y_{\mathcal{B}}$ que definen la posición del cuerpo con respecto a las variables $x_{\mathcal{L}}$ e $y_{\mathcal{L}}$ que definen la posición de la carga. Dicho cero queda situado en $s = \pm \sqrt{\frac{-g}{l}} = \pm i \sqrt{\frac{g}{l}}$. Como consecuencia, se produce una oposición de fase entre los movimientos oscilatorios de la carga y del cuerpo.

Observando el diagrama de Bode de las funciones de transferencia correspondientes a las transformadas de *Laplace* $x_{\mathcal{L}}(s)$ y $x_{\mathcal{B}}(s)$, Figura 4.1, a muy bajas frecuencias cuerpo y carga tienen una

ganancia y fase idénticas, mientras que a altas frecuencias el movimiento de ambos cuerpos está en oposición de fase. Esto se puede observar si se simulan ambas funciones de transferencia, y sus derivadas, ante una entrada impulso en θ_B , Figura 4.2.

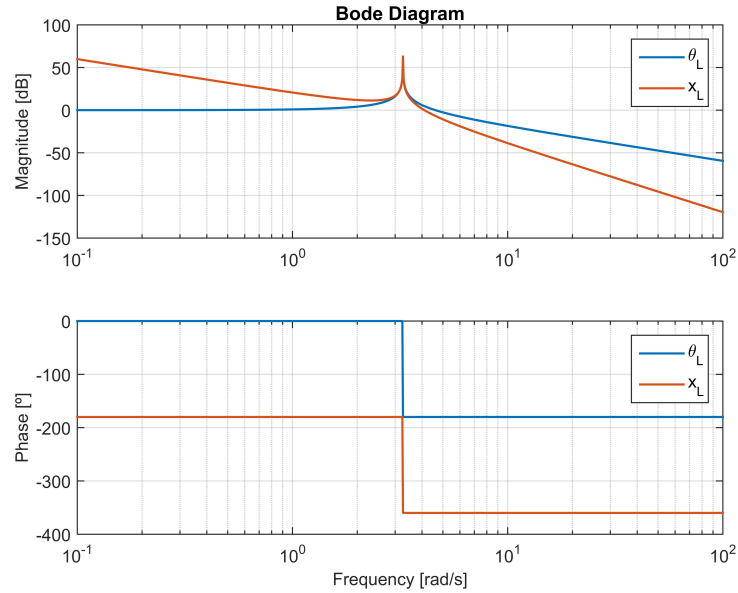


Figura 4.1 Diagrama de Bode de las funciones de transferencia correspondientes a las transformadas de Laplace $x_L(s)$ y $x_B(s)$.

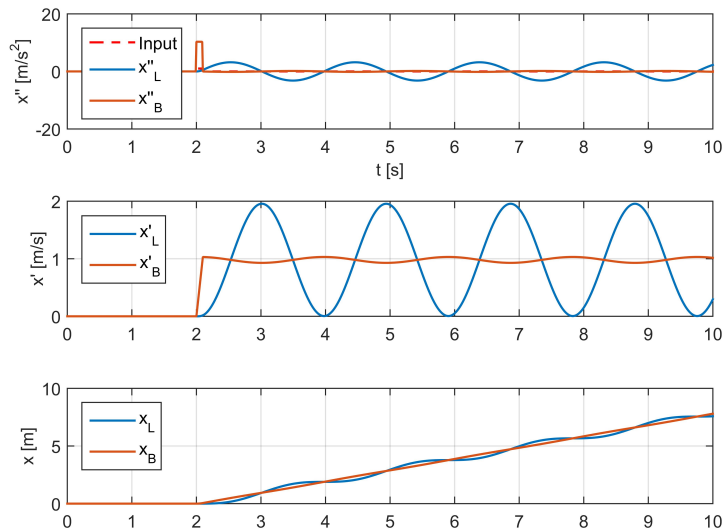


Figura 4.2 Simulación de las funciones de transferencia correspondientes a las transformadas de Laplace $x_L(s)$ y $x_B(s)$, y de sus derivadas temporales, ante una entrada impulso en θ_B .

5 Control PID clásico y control óptimo en 2D

Como ya se mencionó en la introducción, a lo largo de este proyecto se diseñarán y simularán 3 controles lineales y 1 no lineal sobre la posición de la carga en 2 dimensiones (plano " $\hat{x}_T - \hat{z}_T$ "), y se compararán todos ellos cualitativa y cuantitativamente. El objetivo de todos ellos será tratar de asegurar estabilidad y un buen comportamiento del sistema pese a la existencia de incertidumbres y de perturbaciones sobre la planta. Los resultados obtenidos se evaluarán antes de su futura aplicación al caso en 3 dimensiones, o de su uso en otras aplicaciones. A continuación se recuerda la distribución por capítulos de los controles:

- Capítulo 5
 - Control lineal clásico PID.
 - Control lineal óptimo LQR con efecto integral.
- Capítulo 6
 - Control robusto \mathcal{H}_∞ lineal.
 - Control robusto \mathcal{H}_∞ no lineal con efecto integral.

Uno de los motivos de esta distribución no es otro que el de usar los controles de este capítulo como referencia a la hora de evaluar los controles robustos lineal y no lineal que se diseñarán en el siguiente capítulo.

Para simplificar el diseño de los 4 tipos de controles se omitirán los efectos aerodinámicos sobre la carga. Sin embargo, todos ellos se ensayarán sobre el modelo no lineal completo de la planta, incluyendo estos efectos aerodinámicos. Esto tendrá dos consecuencias. Por un lado la fricción aerodinámica sobre la carga tenderá a amortiguar las oscilaciones de la misma con respecto al quadrotor. Por otro lado, tenderá a aumentar el esfuerzo de control para el seguimiento de la referencia de la posición de la carga.

La distribución de este capítulo será la siguiente: se comenzará con la descripción de la planta del sistema, y de las trayectorias y simulaciones a realizar. **Estas dos secciones serán comunes a los controles robustos que se diseñarán en el capítulo siguiente.** Seguidamente se describirán las estrategias de control a usar para los controles lineales, siendo esta sección igualmente válida para el control robusto lineal del siguiente capítulo. Posteriormente se diseñarán y simularán los controles según el orden que se mostró anteriormente.

5.1 Descripción de la planta

La planta a la que se conectarán los controladores para las simulaciones estará definida por las ecuaciones matriciales en coordenadas de la carga en 2D, (4.4). A continuación se vuelve a mostrar la ecuación matricial completa:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \\ \begin{bmatrix} f s_{\theta_B} \\ f c_{\theta_B} \\ 0 \\ {}^{(B)}\tau_{B,\hat{y}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m & 0 & l m_B c_{\theta_C} & 0 \\ 0 & m & -l m_B s_{\theta_C} & 0 \\ -m_C c_{\theta_C} & m_C s_{\theta_C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^{(B)}I_B^{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_C \\ \ddot{z}_C \\ \ddot{\theta}_C \\ \ddot{\theta}_B \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} -l m_B \dot{\theta}_C^2 s_{\theta_C} + c_D \dot{x}_C \|\mathbf{v}_C\| \\ -l m_B \dot{\theta}_C^2 c_{\theta_C} + c_D \dot{z}_C \|\mathbf{v}_C\| \\ -c_D \|\mathbf{v}_C\| (\dot{x}_C c_{\theta_C} - \dot{z}_C s_{\theta_C}) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g m \\ m_C g s_{\theta_C} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.1) \end{aligned}$$

donde ${}^{(B)}\tau_{B,\hat{y}}$ ya fue definida en (2.1), y $\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}})$. No obstante, se tomarán como actuaciones del sistema f y ${}^{(B)}\tau_{B,\hat{y}}$.

Para el diseño de los controladores se considerará esta planta (5.1), linealizada o sin linealizar según sea el caso. Además, los parámetros que aparecen tomarán los valores nominales especificados en la Tabla 2.1, excepto el coeficiente de resistencia aerodinámica de la carga. No obstante, para las simulaciones, con la intención de conservar la máxima fidelidad posible a la realidad, se considerarán ciertas incertidumbres sobre la planta respecto al modelo usado para el diseño de los controladores.

Durante el modelado de una planta se pueden encontrar dos tipos de incertidumbres según su origen: incertidumbres paramétricas y estructurales, [36], [47]. En las paramétricas se incluyen parámetros imprecisos. Las estructurales engloban cambios de punto de trabajo, dinámica no lineal, dinámica no modelada etc.

Las incertidumbres paramétricas relacionadas con imprecisiones pueden ser acotadas. Para los parámetros nominales de la Tabla 2.1 se han estimado las siguientes incertidumbres paramétricas:

- Un máximo del 5 % de incertidumbre respecto al valor nominal sobre las masas y la longitud de la cuerda.
- Un máximo del 10 % de incertidumbre respecto al valor nominal sobre los parámetros inerciales.

En cuanto a las incertidumbres estructurales, se han identificado las siguientes:

- La fricción aerodinámica de la carga no se tendrá en cuenta en el diseño de ninguno de los controles, pero sí será incluida en la planta.
- Para los controles lineales se tendrá como incertidumbre estructural cambios en el punto de trabajo: se pasa de condiciones "hover" a condiciones en movimiento.
- Dinámica de los rotores. Se considerarán como actuaciones del sistema la fuerza total, f , y el par sobre el eje \hat{y} del cuerpo, ${}^{(B)}\tau_{B,\hat{y}}$, siendo necesario considerar la dinámica correspondiente a los tiempos de reacción. Esta dinámica estará presente en el bloque que simule la planta del sistema, y se considerará en el diseño de los controles lineales, aunque no de manera totalmente explícita, buscando reducir la complejidad del problema.
- Saturaciones de los actuadores. Ya comentadas en la Sección 2.1.

Considerando la ecuación, (5.1), así como las incertidumbres expuestas, el bloque de la planta tendrá la forma de la Figura 5.1 en el simulador, donde f^* y τ^* denotan las señales de control que provienen de los controladores. Por otra parte, las salidas serán la posición, ángulo y velocidad angular del quadrotor, y la posición, velocidad lineal, ángulo y velocidad angular de la carga. Como simplificación, en este proyecto se asumirán disponibles estas medidas sin incluir los problemas derivados de los sensores (tiempos de muestreo, ruidos, etc.). A continuación se darán breves nociones sobre los posibles sensores a usar:

- Posición, ángulo y velocidad angular del quadrotor: se usaría un GPS y un altímetro para la medición de la posición del quadrotor, y una IMU (Inertial Measurement Unit) para la medición de los ángulos y velocidades angulares del quadrotor.
- Posición, velocidad lineal, ángulo y velocidad angular de la carga: se incorporaría una cámara para observar y estimar los ángulos de la misma con respecto al quadrotor. Las velocidades angulares con respecto al quadrotor se obtendrían por medio de un estimador. Una vez conocidos estos datos y los del quadrotor, con las ecuaciones (3.1) y (3.2) se calcularía la posición y velocidad lineal de la carga con respecto al sistema de referencia inercial.

Las saturaciones se aplicarán sobre la fuerza propulsiva de cada rotor, f_i . Para ello, se usará la relación (2.1) para descomponer las variables de control f y ${}^{(B)}\tau_{B,\hat{y}}$ en las fuerzas propulsivas de cada rotor (f_i), aplicando aquí las correspondientes saturaciones. Posteriormente se volverá a usar la relación (2.1) (inversa) para volver a las variables de control f y ${}^{(B)}\tau_{B,\hat{y}}$. Estos cálculos tendrán lugar en el bloque "Dinámica de rotores + saturaciones" de la Figura 5.1.

Conviene puntualizar que las simulaciones se realizarán sin tener en cuenta ruidos de los sensores. En este proyecto no se ha realizado un estudio de los sensores disponibles en el mercado, ni de los ruidos que estos conllevarían, dejando este punto para trabajos futuros. No obstante, mediante los

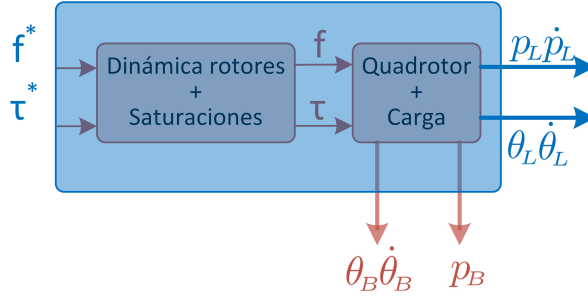


Figura 5.1 Bloque de la planta del sistema.

filtros adecuados, los resultados de las simulaciones incluyendo ruidos deberían asemejarse a los resultados sin incluir ruidos.

Recapitulando, se diseñarán leyes de control considerando una planta con valores nominales y se simularán sobre una planta con incertidumbres. De este modo se conseguirán simulaciones con cierto grado de realismo. Por otro lado, queda justificado el uso de leyes de control robustas debido a la existencia de incertidumbres.

5.2 Generadores de trayectorias y simulaciones a realizar

El control de la carga será evaluado ante referencias dadas por un generador de trayectorias, tal y como sucedería en la realidad. Un buen diseño de las trayectorias es de vital importancia para evitar alcanzar las saturaciones de los actuadores de manera innecesaria, optimizar el consumo de energía, o evitar comportamientos indeseados del sistema. En esta sección se describirán el tipo de trayectorias a seguir, los generadores de trayectorias diseñados, y los generadores finalmente elegidos. No obstante, y tratando de preservar cierta brevedad, no se entrará en detalles teóricos, aconsejando revisar las fuentes bibliográficas [35], [5] y [7] para mayor detalle.

Se usarán dos tipos de trayectorias que permitirán evaluar los controladores en las dos dimensiones de trabajo:

- Trayectoria lineal, Figura 5.2. Parte del punto inicial $\mathbf{p}_c = [0, 0, 0]$ m, llega al punto $\mathbf{p}_c = [1, 0, 1]$ m, y posteriormente vuelve al punto de inicio. Los generadores de trayectorias diseñados para este trayecto han sido:
 - Interpolador trapezoidal.
 - Interpolador trapezoidal con ajuste parabólico.
 - Interpolador polinómico de grado 3.
 - Interpolador polinómico de grado 5.
- Trayectoria circular, Figura 5.3. Se describe una circunferencia completa de radio 1 m. En este caso, los generadores de trayectorias diseñados han sido:

- Interpolador polinómico de grado 3.
- Interpolador polinómico de grado 5.

Todos estos generadores de trayectorias están basados en las fuentes bibliográficas [35] (apuntes de la asignatura "Control y programación de robots", por Manuel Gil Ortega) y [5] ("Fundamentos de robótica", por Antonio Barrientos).

En las dos imágenes citadas, los puntos rojos son las particiones realizadas sobre la trayectoria. Estas particiones son arbitrarias y serán especificadas previamente, al igual que el tiempo de duración de la trayectoria, constituyendo los inputs de los generadores de trayectorias. Finalmente, los generadores de trayectorias unirían dichos puntos.

Tras diversas pruebas con los controladores, se ha decidido emplear el interpolador polinómico de grado 5 para ambas trayectorias. Los criterios de elección han sido principalmente:

- La mayor continuidad en las derivadas de la trayectoria mejora considerablemente el comportamiento del quadrotor. Además, evita entrar en saturación de actuadores de manera innecesaria.
- La disponibilidad de hasta 5 derivadas de la trayectoria para las referencias. Aunque debido a las limitaciones de los sensores los controladores solo podrán seguir las referencias de posición y velocidad, en algunos casos resulta de utilidad aportar los valores de las derivadas sucesivas de la trayectoria de referencia al controlador (control LQR, Sección 5.6).

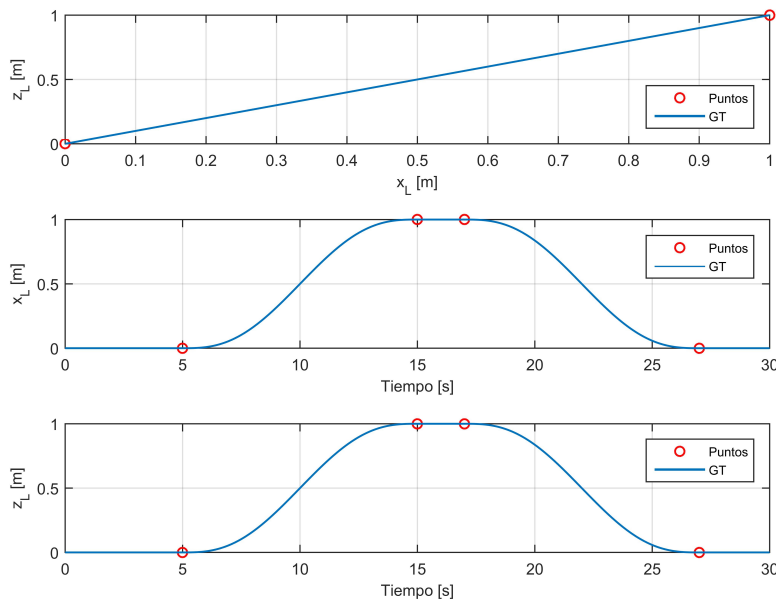


Figura 5.2 Trayectoria lineal para la validación de los controladores. Interpolador polinómico de grado 5. Generador de trayectorias en azul.

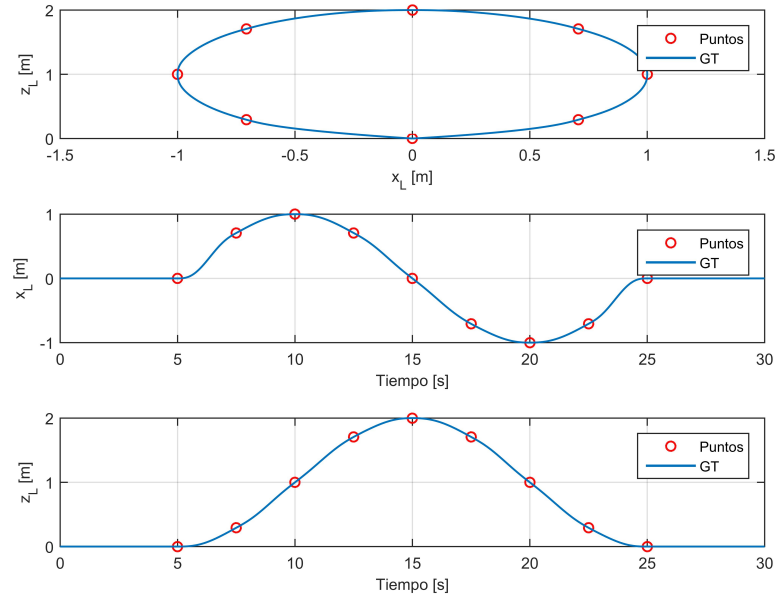


Figura 5.3 Trayectoria circular de radio 1 m para la validación de los controladores. Partición en 7 puntos intermedios. Inteporlador polinómico de grado 5. Generador de trayectorias en azul.

5.2.1 Simulaciones a realizar

Las trayectorias tendrán los siguientes tiempos de duración y particiones en las simulaciones de los controladores:

- Trayectoria lineal: los tiempos de duración de los 2 movimientos lineales serán de 10 segundos cada uno. El tiempo de separación entre ambos movimientos lineales será de 2 segundos. No habrá puntos intermedios entre los puntos de partida y de destino. Estas especificaciones se corresponden con las mostradas en la imagen Figura 5.2.
- Trayectoria circular: el tiempo de duración de la trayectoria completa será de 20 segundos. La trayectoria se dividirá en 7 puntos intermedios. Estas especificaciones se corresponden con las mostradas en la imagen Figura 5.3.

Además de lo comentado, se aplicarán perturbaciones en ambas actuaciones de control a los 30 segundos de las simulaciones. La perturbación será en torno al 25 % de la capacidad máxima de las actuaciones. Para la fuerza de propulsión la perturbación será de $f = 10$ N, y para el par de rotación será de ${}^{(B)}\tau_{B,\dot{y}} = 1$ Nm.

Se realizarán 2 simulaciones por trayectoria:

- Caso nominal: se usarán los valores nominales para la planta no lineal. No se incluyen los efectos aerodinámicos sobre la carga, las saturaciones, ni la dinámica de las actuaciones.

- Caso con incertidumbres: se incluirán los efectos aerodinámicos sobre la carga, las saturaciones, y la dinámica de las actuaciones. Además, se tomarán los valores de los parámetros que provoquen las mayores diferencias con respecto a los valores nominales en las ecuaciones del movimiento, siempre dentro de los respectivos porcentajes de incertidumbres.

Las máximas diferencias con respecto a los valores nominales se han calculado utilizando las transformadas de (4.6): se tratará de modificar los polos de $x_{\mathcal{L}}(s)$ y $z_{\mathcal{L}}(s)$ lo máximo posible. Como se puede notar, las masas influyen de distinta manera en ambas transformadas de *Laplace*, sin embargo, como se verá en las siguientes secciones, el control de la posición horizontal es más complejo y crítico que el de la altitud, primando provocar las mayores diferencias en $x_{\mathcal{L}}(s)$. Existen 2 soluciones que provocan la máxima modificación de los polos de $x_{\mathcal{L}}(s)$:

$$x_{\mathcal{L}}(s) = \frac{g \theta_{\mathcal{B}}(s)}{s^2 \left(s^2 \frac{l m_{\mathcal{B}}}{g m} + 1 \right)} ; \quad z_{\mathcal{L}}(s) = \frac{f(s)}{m s^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l = 0.97 \text{ m} \\ m_{\mathcal{B}} = 2.24 \text{ kg} \\ m_{\mathcal{L}} = 0.118 \text{ kg} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} l_{\text{mín}} = 0.95 l = 0.922 \text{ m} \\ m_{\mathcal{B}\text{mín}} = 0.95 m_{\mathcal{B}} = 2.13 \text{ kg} \\ m_{\mathcal{L}\text{máx}} = 1.05 m_{\mathcal{L}} = 0.124 \text{ kg} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} l_{\text{máx}} = 1.05 l = 1.019 \text{ m} \\ m_{\mathcal{B}\text{máx}} = 1.05 m_{\mathcal{B}} = 2.352 \text{ kg} \\ m_{\mathcal{L}\text{mín}} = 0.95 m_{\mathcal{L}} = 0.112 \text{ kg} \end{array} \right.$$

Se elige la de menor longitud de cuerda ya que, a menor longitud, mayor frecuencia de oscilación tendrá la carga con respecto al quadrotor, y, por tanto, mayor esfuerzo de control será necesario para controlar la posición de la misma. En cuanto a ${}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{yy}$, se elige el menor de sus valores sin ningún motivo de peso: ${}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}\text{mín}}^{yy} = 0.9 {}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{yy} = 0.9 \cdot 0.036 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 0.033 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Tras las simulaciones se calculará un índice de bondad para tener una medida del error cometido por cada controlador. La técnica escogida es la ISE (*Integral Square Error*): $\text{ISE} = \int_0^\infty e^2(t) dt$, [32].

Para terminar esta sección, y salvo que se especifique lo contrario, el método de integración elegido para las simulaciones será "ODE45" (método explícito), Runge-Kutta, Dorman-Prince (4,5), de paso variable, con un paso de integración máximo de 0.01 s. Revisando la documentación de Matlab al respecto, y [32], se estima que esta configuración sea de suficiente precisión para la mayor parte de las simulaciones que se tratarán en este proyecto.

5.3 Control lineal de la carga: planta a controlar y estrategias de control

La planta a considerar en el diseño de los controles lineales será la definida (5.1), pero linealizada en torno al vuelo estacionario o "hover", (4.5). A continuación se recuerda su expresión:

$$\boldsymbol{\tau}^\delta = \mathbf{M}^\delta \ddot{\mathbf{q}}^\delta + \mathbf{G}^\delta$$

$$\begin{bmatrix} f_x^\delta \\ f_z^\delta \\ 0 \\ {}^{(\mathcal{B})}\tau_{\mathcal{B},\hat{y}}^\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & l m_{\mathcal{B}} & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_{\mathcal{L}}^\delta \\ \ddot{z}_{\mathcal{L}}^\delta \\ \ddot{\theta}_{\mathcal{L}}^\delta \\ \ddot{\theta}_{\mathcal{B}}^\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \theta_{\mathcal{L}}^\delta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Puesto que se trata de ecuaciones linealizadas en torno al punto de equilibrio de vuelo estacionario, los términos correspondientes a las fuerzas de resistencia aerodinámica, entre otros, desaparecen.

Por otro lado, también se recuerdan las correspondientes transformadas de *Laplace*, (4.6):

$$\begin{aligned} x_{\mathcal{L}}(s) &= \frac{g \theta_{\mathcal{B}}(s)}{s^2 \left(s^2 \frac{l m_{\mathcal{B}}}{g m} + 1 \right)}; & z_{\mathcal{L}}(s) &= \frac{f(s)}{m s^2} \\ \theta_{\mathcal{B}}(s) &= \frac{{}^{(\mathcal{B})}\tau_{\mathcal{B},\hat{y}}(s)}{{}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{yy} s^2}; & \theta_{\mathcal{L}}(s) &= \frac{\theta_{\mathcal{B}}(s)}{\left(s^2 \frac{l m_{\mathcal{B}}}{g m} + 1 \right)} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Analizando la ecuación matricial (5.2), así como las transformadas (5.3), se puede concluir que las ecuaciones para la posición horizontal y altitud de la carga ($x_{\mathcal{L}}$ y $z_{\mathcal{L}}$) están desacopladas (recalcando que se trata de sus expresiones lineales). Es decir, pueden diseñarse controles lineales independientes para ambos subsistemas, no siendo necesario el uso de controles multivariables MIMO.

Por otro lado, en cuanto al subsistema $x_{\mathcal{L}}$ en particular, una de las opciones de control sería la de tratar de controlar la posición horizontal de la carga, $x_{\mathcal{L}}$, y el ángulo de esta, $\theta_{\mathcal{L}}$, conjuntamente a través de un control multivariable, tratando de minimizar $\theta_{\mathcal{L}}$ en todo momento. Mirando la Matriz de Ganancias Relativas a lo largo de la frecuencia (RGA - Relative Gain Array), [47], Figura 5.4, la posición horizontal se podría controlar a bajas frecuencias, mientras que el ángulo de la carga lo haría a altas frecuencias. Sin embargo, los controles lineales a diseñar en este proyecto tratarán de controlar únicamente la posición de la carga, y, dependiendo de los resultados encontrados, se considerará aplicar un control lineal para controlar $x_{\mathcal{L}}$ y $\theta_{\mathcal{L}}$ como trabajo futuro. Se excluye de esta afirmación al control robusto \mathcal{H}_{∞} no lineal, que al mismo tiempo que controla la posición de la carga, tratará de estabilizar el ángulo $\theta_{\mathcal{L}}$.

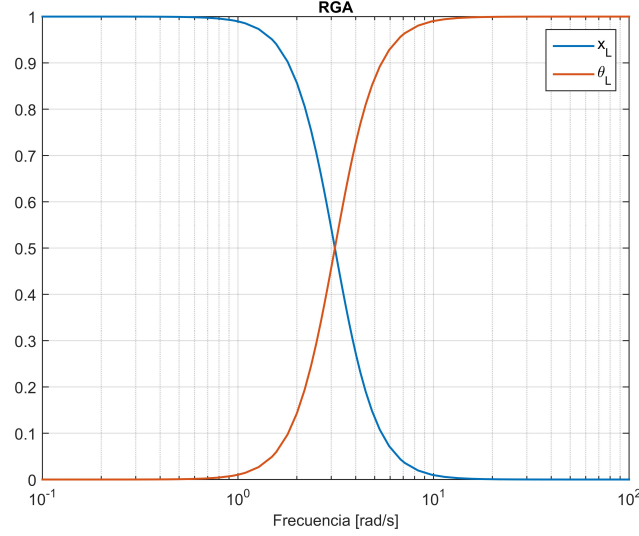


Figura 5.4 Matriz de Ganancias Relativas (RGA) a lo largo de la frecuencia para x_L y θ_L .

De este modo, los controladores lineales se compondrán por controles lineales independientes para el subsistema de de posición horizontal y de altitud, no incorporando en ninguno de los casos un control sobre θ_L . En la Figura 5.5 se ha representado el esquema de cualquiera de los controles lineales de posición horizontal y altitud de la carga en lazo cerrado que se diseñarán en este trabajo.

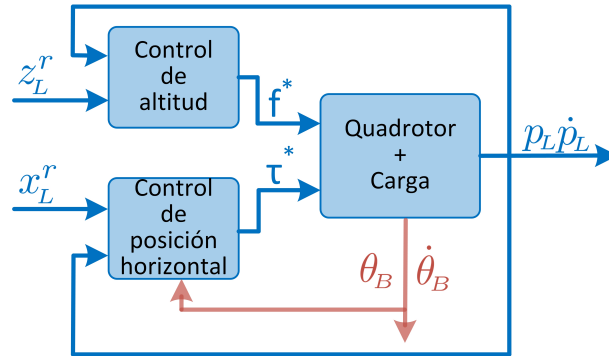


Figura 5.5 Esquema simplificado del control lineal de la carga en lazo cerrado.

En cuanto a las ecuaciones relativas a la posición horizontal de la carga, x_L , se puede notar una estructura en cascada, donde a través de variaciones en el par de actuación, ${}^{(L)}T_{L,y}$, se consigue una variación en la actitud del quadrotor, θ_B , modificando a su vez la posición horizontal de la carga, x_L . Dada esta estructura, puesto que existen sensores diferentes para medir la posición de la carga y la actitud del quadrotor, se optará por un control en cascada para todos los controles lineales del subsistema de posición horizontal, Figura 5.6. En todos los controles lineales se ha comprobado que el uso de esta estrategia ofrece ciertas ventajas que se irán comentando durante el desarrollo de este trabajo, especialmente en cuanto al rechazo de perturbaciones se refiere.

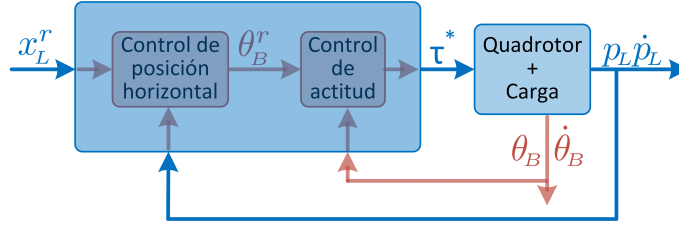


Figura 5.6 Configuración del control lineal en cascada de la posición horizontal de la carga en 2 dimensiones.

A través de una estrategia de control en cascada, [26], será posible diseñar y modificar el control de la posición horizontal de la carga (lazo externo) y el control de la actitud del quadrotor (lazo interno) de manera individual. Además, se reducirán los efectos de los retardos en el subsistema completo, se minimizará el error de seguimiento y de regulación en la actitud antes de que estos errores influyan en la posición de la carga, así como los efectos de las perturbaciones en la actitud del quadrotor. Como se ha comentado en el párrafo anterior y se comentará posteriormente, la principal ventaja encontrada en el uso de un control en cascada para el subsistema de posición horizontal de la carga es la mayor facilidad a la hora de conseguir un buen comportamiento de rechazo de perturbaciones.

Dada la sencillez de la transformada $\theta_B(s)$ de (5.3), y para simplificar el diseño de los controles lineales, el lazo responsable de la actitud del quadrotor será controlado por un control PID común para todos ellos.

5.4 Control de actitud del quadrotor: control lineal clásico PID

El objetivo principal en este punto del diseño será la simplicidad. Simplificando el control del lazo interno (actitud del quadrotor) se disminuirá considerablemente el esfuerzo del diseño del control del lazo externo (subsistema de posición horizontal de la carga).

Surge aquí la duda entre el uso de 2 estrategias de control: un único control PD, apropiado para fdt del tipo doble integrador, o una estrategia en cascada. El control PD es bastante extendido en la literatura, y ya fue usado en [3]. Por otra parte, también suele encontrarse la estrategia de control en cascada para la actitud de un quadrotor, poniendo como ejemplo [20], caso de cierta similitud con el presente proyecto (en lugar de una carga colgante se tiene un brazo robótico), y en donde se requiere de una gran precisión para la actitud del quadrotor. Además, ciertos UAVs comerciales (en donde la robustez adquiere gran importancia) usan una estrategia en cascada para la actitud del quadrotor, como por ejemplo en el ArduPilot, caso estudiado en [1].

Finalmente se ha decidido usar aquí también una estrategia de control en cascada, Figura 5.7, con la intención de minimizar el error de seguimiento y regulación en la velocidad angular del quadrotor, reduciendo los efectos de los retardos y de las perturbaciones sobre el ángulo del quadrotor, y minimizando de esta manera aún más el impacto de estos efectos sobre la posición de la carga. Además, la simplicidad de la transformada $\theta_B(s)$ de (5.3) ayudará a evitar expresiones complejas en el bucle cerrado del control de actitud.

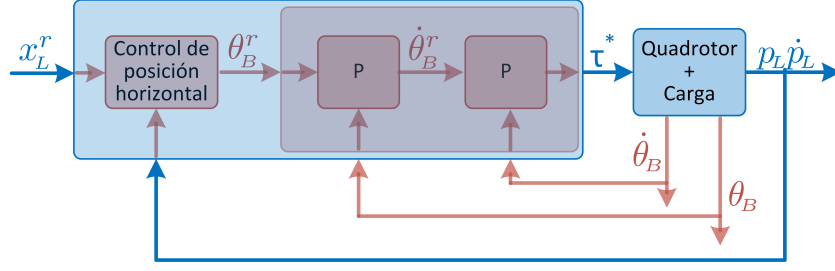


Figura 5.7 Estrategia de control del lazo interno para el control de posición horizontal de la carga.

Se optará por un controlador proporcional P-P para el control del ángulo y de la velocidad angular del quadrotor, Figura 5.7. Los criterios en la elección de este tipo de control han sido:

- Simplicidad. El bucle cerrado del control de actitud completo resulta en una fdt de 2º orden relativamente fácil de manejar para el posterior diseño del control de posición de la carga. Por esta misma razón se ha evitado introducir en este punto integradores. Además, esta fdt resultante es más simple que si se hubiese decidido emplear un único control PD, que daría lugar a una fdt de 2º orden con un cero.
- En el bucle cerrado del control de actitud completo se dispone de un margen de fase suficiente para asegurar una respuesta sin oscilaciones, así como estabilidad y comportamiento robustos para la actitud del quadrotor, como se verá posteriormente. Esta también ha sido otra de las razones por las que se ha preferido no introducir efecto integral en este punto del diseño. Como es bien sabido, la adición de efecto integral conlleva una disminución de la fase del sistema. Esta reducción de fase podría compensarse con un control derivativo, aunque, por contra, ya se estaría complicando nuevamente el bucle cerrado del control de actitud.

Aunque no se introduzca efecto integral en este punto, sí que se introducirá para el lazo externo del control de posición horizontal de la carga. Será ahí en donde se corrijan los errores estáticos y de perturbaciones tanto del lazo externo como del lazo interno del control de posición horizontal de la carga.

A continuación se detallará brevemente el proceso seguido para el diseño del control de actitud del quadrotor.

El control de la velocidad angular se ha diseñado considerando la fdt (5.4) como planta, que proviene de derivar la transformada $\theta_B(s)$ de (5.3):

$${}^{\text{act}}G_{ba_1}(s) = \frac{\dot{\theta}_B(s)}{{}^{(B)}T_{B,y}(s)} = \frac{1}{{}^{(B)}I_B^{yy} s} \quad (5.4)$$

Conectando dicha planta a un control proporcional K_1 , el bucle cerrado del control de la velocidad angular quedaría como una fdt de 1º orden:

$${}^{\text{act}}G_{bc_1}(s) = \frac{\dot{\theta}_B(s)}{\dot{\theta}_B^r(s)} = \frac{1}{\frac{{}^{(B)}I_B^{yy}}{K_1} s + 1}$$

Dada la simplicidad de esta fdt, y dado que el margen de fase en bucle abierto será de 90° sea cual sea K_1 , se ha decidido emplear técnicas analíticas para el diseño de la ganancia K_1 , [52].

Aunque no se incluya la dinámica de las actuaciones, sí que deberá considerarse su constante de tiempo. En el Capítulo 1 se comentó que el tiempo de subida estimado para los pares del quadrotor estaría en torno a unos $t_s = 0.008$ s. Por tanto, su constante de tiempo se situaría en torno a $\tau = 0.008 \text{ s} / 3 = 0.0027$ s. Una regla habitual sería situar K_1 de manera que la dinámica de ${}^{\text{act}}G_{bc1}(s)$ sea de 3 a 4 veces más lenta que la de los pares de actuación. No obstante, dado que se trata de una estimación, se ha optado por situar la dinámica de ${}^{\text{act}}G_{bc1}(s)$ unas 6 veces más lenta que la de los pares. Con esta medida se pretende aportar robustez al control de actitud. Por consiguiente:

$${}^{\text{act}}\tau_{bc1} = \frac{{}^{(B)}I_B^{yy}}{K_1} = 6 \cdot 0.0027 \text{ s} = 0.016 \text{ s} \Rightarrow K_1 = 2.27 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$$

Pasando ya al lazo externo del control de actitud, la fdt de la planta a controlar, en línea con el control proporcional K_2 a aplicar, tendrá las siguientes fdt en bucle abierto y cerrado respectivamente:

$${}^{\text{act}}G_{ba2}(s) = \frac{\theta_B(s)}{\dot{\theta}_B^r(s)} = {}^{\text{act}}G_{bc1}(s) \frac{K_2}{s} \quad (5.5)$$

$${}^{\text{act}}G_{bc2}(s) = \frac{\theta_B(s)}{\dot{\theta}_B^r(s)} = \frac{1}{\frac{{}^{(B)}I_B^{yy}}{K_1 K_2} s^2 + \frac{1}{K_2} s + 1} \quad (5.6)$$

Dependiendo de la posición de los polos de ${}^{\text{act}}G_{bc2}(s)$, la respuesta será con o sin oscilaciones. Por este motivo se prefiere usar técnicas frecuenciales para el diseño del control correspondiente. El procedimiento seguido en este tipo de diseño está basado en los conocimientos impartidos en la asignatura *Fundamentos de Control* por Manuel Vargas, [53]. En los desarrollos que se detallan a continuación se usarán algunas aproximaciones vistas en dicha asignatura para la frecuencia de corte ω_c , coeficiente de amortiguamiento δ , margen de fase M_f , etc.

Los criterios perseguidos serán:

- Una dinámica de 3 a 4 veces más lenta que la velocidad angular del quadrotor:

$${}^{\text{act}}\omega_{c,ba2} = {}^{\text{act}}\omega_{c,ba1} \cdot [3, 4] = [15.63, 20.83] \text{ rad/s}$$

- Una respuesta sin oscilaciones. Se buscará una sobre-oscilación menor o igual al $SO \leq 5\%$, que se traduce en un margen de fase igual o superior a $M_f \geq 70^\circ$ si se utiliza la siguiente

aproximación:

$$\delta = -\frac{\log(SO)}{\sqrt{\pi^2 + \log(SO)^2}}$$

La ganancia que da lugar al mejor compromiso entre estos dos criterios es $K_2 = 22.39 \text{ s}^{-1}$, tal y como se muestra en el diagrama de Bode de la fdt en bucle abierto (5.5), Figura 5.8.

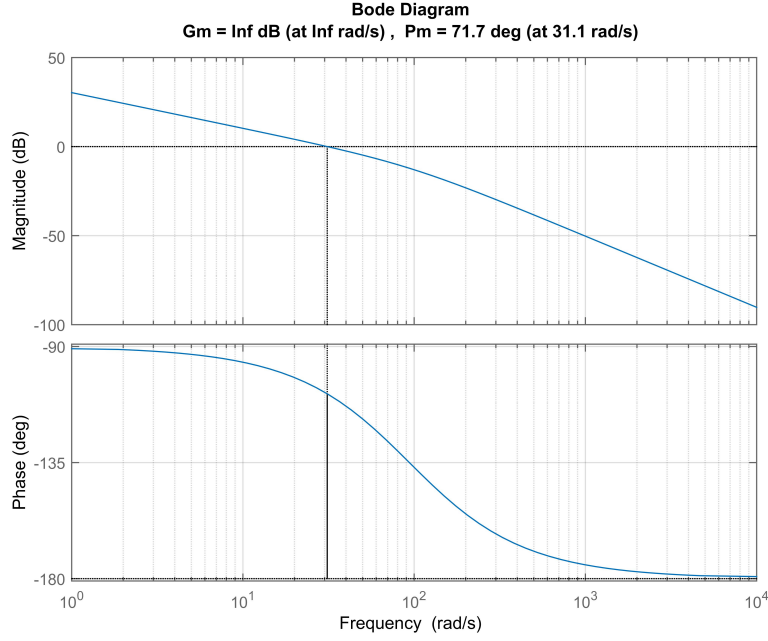


Figura 5.8 Margenes de fase y de ganancia del control del lazo externo de la actitud del quadrotor en bucle abierto, fdt (5.5), con $K_1 = 2.27 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$ y $K_2 = 22.39 \text{ s}^{-1}$.

Llegados a este punto, el control de actitud del quadrotor ya estaría diseñado. En la Figura 5.9 se muestra la respuesta del control frente a una referencia escalón (usando el comando "step" de Matlab). El código de colores seguido es el siguiente:

- Rojo: referencia escalón.
- Negro: banda del 95 % y del 105 % sobre la referencia.
- Azul: familia de plantas de valores aleatorios según las incertidumbres.
- Verde: respuesta del sistema usando valores nominales.

Se han supuesto 50 posibles plantas según distintos valores que la inercia ${}^{(B)}I_B^{yy}$ podría adquirir. También se ha incluido la respuesta con los valores máximo y mínimo de la inercia ${}^{(B)}I_B^{yy}$, de manera que la respuesta quede totalmente definida. Además, se ha incluido la dinámica de la actuación en

todas las plantas (incluyendo el caso nominal).

Como se puede observar en esta Figura 5.9, el tiempo de subida estaría situado en torno a los $t_s = 0.081$ s, y el de establecimiento en torno a los $t_e = 0.095$ s, para todos los casos, constituyendo de esta manera una respuesta válida para el diseño del control de posición horizontal de la carga que se realizará posteriormente. También se puede concluir la existencia de estabilidad y comportamiento robustos, puesto que las especificaciones conseguidas son muy similares para toda la familia de curvas.

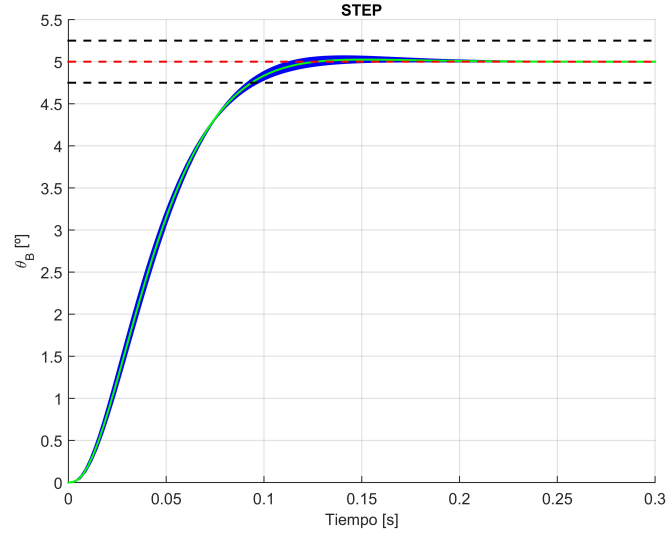


Figura 5.9 Respuesta del control de actitud del quadrotor para una familia de plantas lineales. Simulación realizada con el comando "step" de Matlab.

5.5 Control lineal clásico PID para la posición horizontal y altitud de la carga

Considerando el bucle cerrado del lazo interno del subsistema de posición horizontal, (5.6), y la fdt correspondiente a $x_c(s)$ de (5.3), la fdt del lazo externo en bucle abierto a controlar para la posición horizontal de la carga quedaría:

$${}^{\text{pos}}G_{ba3}(s) = \frac{x_c(s)}{\theta_B^r(s)} = \frac{g}{\left(\frac{{}^{(B)}I_B^{yy}}{K_1 K_2} s^2 + \frac{1}{K_2} s + 1 \right) \cdot s^2 \left(s^2 \frac{l m_B}{g m} + 1 \right)} \quad (5.7)$$

Dado que la fdt anterior, ${}^{\text{pos}}G_{ba3}(s)$, es ya de orden 6, se descartará la implementación de una estrategia en cascada para la velocidad y posición horizontal de la carga. Por tanto, se diseñarán los controles lineales (PID, óptimo y robusto lineal) directamente para la posición horizontal de la carga, ${}^{\text{pos}}G_{ba3}(s)$.

En cuanto al control de altitud, cuya planta es $z_c(s)$ de (5.3), la variación de la altitud de la carga z_c sí que está ligada directamente a la actuación correspondiente (fuerza propulsiva total f). Esto permitirá que, con una estrategia simple del tipo control directamente conectado a la planta, se pueda actuar de manera rápida y efectiva sobre las actuaciones para la eliminación de los errores y para el rechazo de perturbaciones.

Definidas ya las estrategias de control para todos los subsistemas, en la Figura 5.10 se muestra un esquema del control completo de la posición horizontal y altitud de la carga. Esta estructura será válida para todos los controles lineales a diseñar.

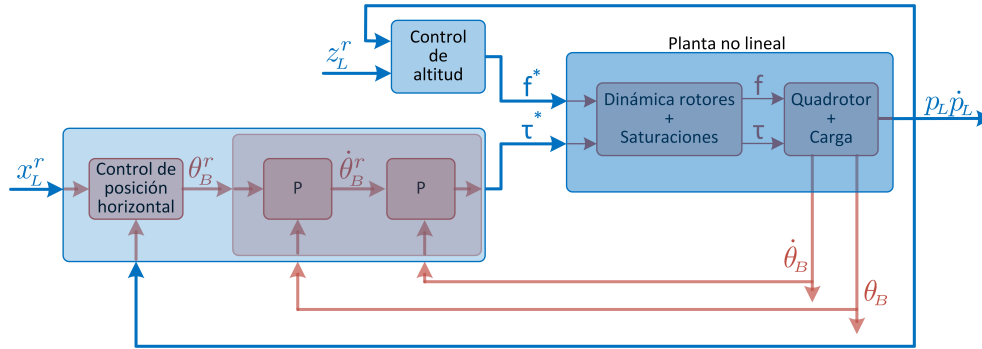


Figura 5.10 Esquema del control completo de posición horizontal y altitud de la carga..

5.5.1 Lazo externo del control de posición horizontal de la carga

Dada la planta a usar en el diseño del control PID del lazo externo del subsistema de posición horizontal de la carga, (5.7), se optará por el diseño mediante técnicas frecuenciales.

Los criterios que se buscarán serán en este caso:

- Dinámica de 3 a 4 veces más lenta que la del lazo interno. La frecuencia de corte del lazo interno fue de $^{\text{act}}\omega_{c,ba_2} = 21.2 \text{ rad/s}$, por lo que la frecuencia de corte del lazo externo deberá situarse en torno al intervalo $^{\text{pos}}\omega_{c,ba_3} = [5.3, 7.07] \text{ rad/s}$.
- Asegurar robustez a través del margen de fase. Para ello, $M_f \geq 30^\circ$. En este caso, aunque no se asegure una respuesta sin oscilaciones, el generador de trayectorias actuará como un filtro a la entrada del sistema controlado, reduciendo las posibles oscilaciones.

En la Figura 5.11 se muestran los márgenes de ganancia y de fase del lazo externo en bucle abierto sin controlador (azul), y con el mejor controlador hallado (naranja). De partida se aprecia que las frecuencias de corte deseadas se sitúan muy cercanas al pico de resonancia, por lo que se decide trasladar la frecuencia ligeramente a la derecha, $^{\text{pos}}\omega_{c,ba_3} \approx 11 \text{ rad/s}$, para aportar cierta robustez. Por otro lado, se requiere aumentar la fase unos 238° como mínimo para que el sistema tenga un margen de fase superior a los $M_f \geq 30^\circ$ a dicha frecuencia.

El controlador diseñado está compuesto por un control PI y una triple red de avance, (5.8). Se han añadido también 3 polos de alta frecuencia para que el control sea realizable.

$${}^{\text{pos}}C_3^{\text{PID}}(s) = \frac{0.09 (0.52 s + 1)}{0.52 s} \cdot \frac{(1.04 s + 1)^3}{(1/500 \cdot s + 1)^3} \quad (5.8)$$

El control PI será responsable del rechazo de perturbaciones y de la eliminación de los errores estáticos. Los controles PD aportan la fase necesaria, alrededor de los 255° , para estabilizar y aportar robustez al sistema, llevando el margen de fase a unos $M_f = 32.8^\circ$. Se descarta añadir otro efecto derivativo debido a que el corte de $|{}^{\text{pos}}G_{ba_3}(j\omega)|$ por 0 dB sería demasiado plano.

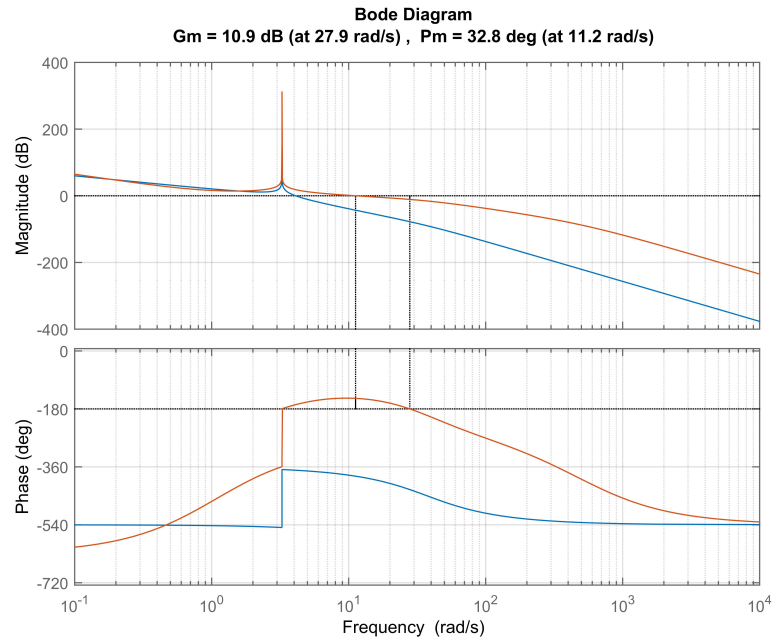


Figura 5.11 Margenes de fase y de ganancia del control PID del lazo externo de la posición de la carga en bucle abierto.

En la Figura 5.12 se muestra la respuesta del control de posición horizontal de la carga frente a una referencia escalón usando el comando "step". Se han supuesto 50 posibles plantas según las incertidumbres descritas. También se ha incluido la dinámica de actuación de los pares. El código de colores es el mismo que el ya descrito en el control de actitud del quadrotor, Sección 5.4.

Se tiene un tiempo de subida de $t_s = 0.13$ s, el tiempo de establecimiento se podría considerar cercano a los $t_e = 0.88$ s, y una sobre-oscilación del $SO = 45\%$. Como ya se apuntó anteriormente, el generador de trayectorias actuará como un filtro a la entrada, lo que reducirá significativamente las oscilaciones, como se mostrará en la Subsección 5.5.3.

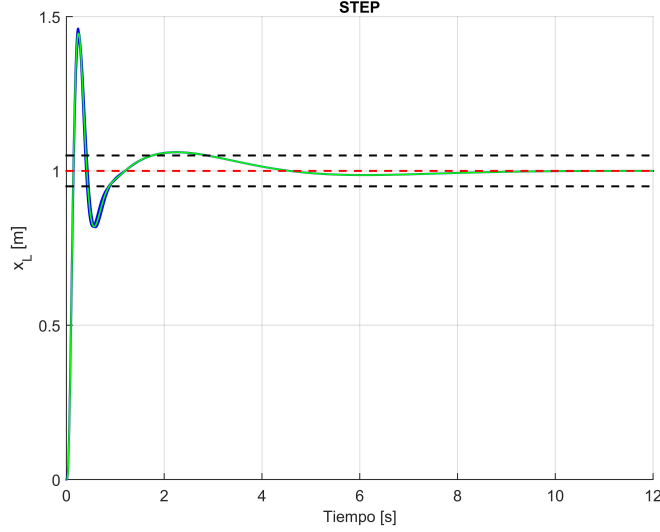


Figura 5.12 Respuesta del control PID de la posición horizontal de la carga ante una familia de plantas lineales. Simulación realizada con el comando "step" de Matlab.

5.5.2 Control de altitud de la carga

El controlador a implementar para el control de altitud de la carga tendrá efecto integral, PI, para la eliminación del error estático y para el rechazo de perturbaciones. Además, mirando la transformada $z_c(s)$, (5.3), el sistema en bucle abierto sin control posee un margen de fase constante en la frecuencia e igual a $M_f = 0^\circ$, por lo que será necesario añadir también efecto derivativo, PD. Se volverán a usar técnicas frecuenciales.

Según se comentó en la Sección 2.1, el tiempo de subida estimado para la actuación de la fuerza propulsiva es de $t_s = 0.01$ s. Al igual que para el control de actitud, se buscará una dinámica 6 veces más lenta que la dinámica de la actuación para aportar robustez al control. Por tanto, se buscará una frecuencia ${}^{\text{alt}}\omega_c = \pi / (2 \cdot 0.01 \cdot 6) = 26.18$ rad/s. Se intentará también que el margen de fase se sitúe en torno a los $M_f = 60^\circ$. No obstante, no importará si este es menor debido a que la referencia será transmitida por un generador de trayectorias, cuyo comportamiento se asemeja al de un filtro a la entrada.

El controlador diseñado es el mostrado en la expresión (5.9). En la Figura 5.13 se pueden observar los márgenes de fase y de ganancia del control de altitud de la carga conectado a la planta (5.3) en bucle abierto. Se confirma por tanto que se han cumplido los objetivos buscados. Sin embargo, conviene fijarse en el margen de ganancia: aunque este sea negativo, se ha verificado a través del diagrama de Nyquist la estabilidad del sistema (no hay giros en torno a -1 en sentido horario, ni polos en el Semi-Plano Derecho).

$${}^{\text{alt}}C_1^{\text{PID}}(s) = \frac{(0.44s + 1)(0.082s + 1)}{0.082s} \cdot \frac{1}{1/250 \cdot s + 1} \quad (5.9)$$

De nuevo, se ha simulado el control frente a referencias en escalón para 50 posibles plantas según las incertidumbres, Figura 5.14. Se han incluido las respuestas con los valores máximo y mínimo de las masas, así como la dinámica de las actuaciones. Se aprecia una sobre-oscilación del $SO = 33\%$, un tiempo de subida de $t_s = 0.05$ s, y un tiempo de establecimiento de $t_e = 0.23$ s.

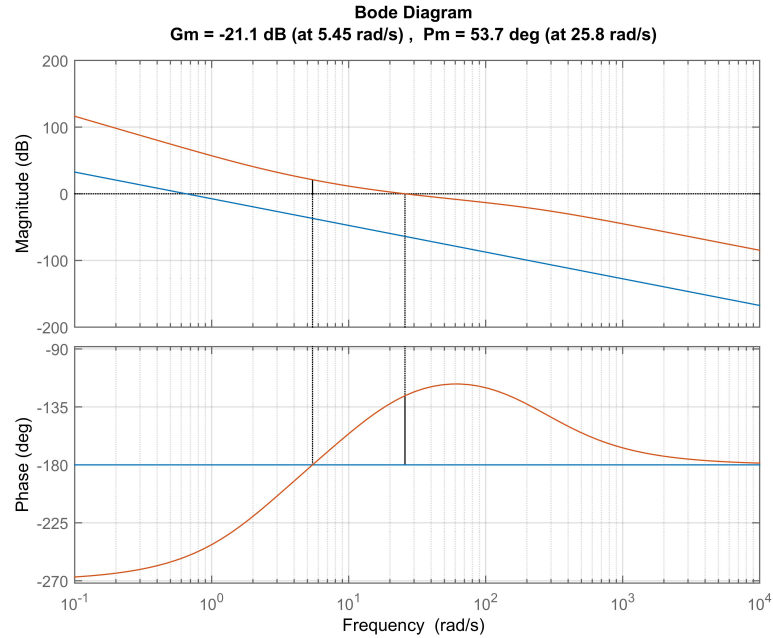


Figura 5.13 Margenes de fase y de ganancia del control PID de altitud de la carga en bucle abierto.

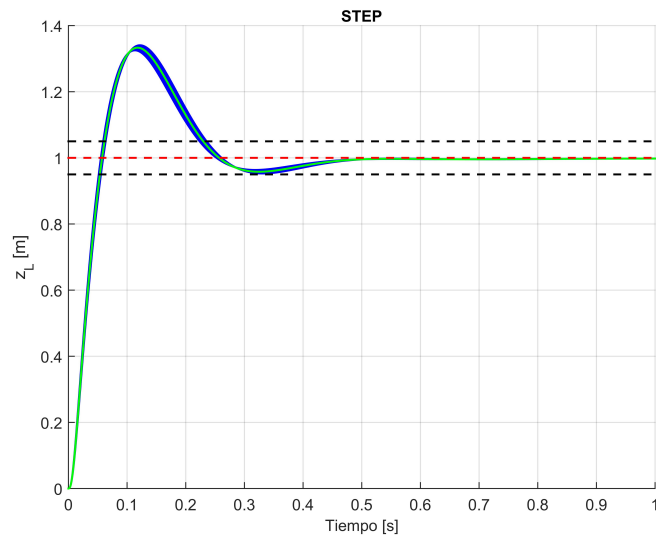


Figura 5.14 Respuesta del control PID de altitud de la carga ante una familia de plantas lineales. Simulación realizada con el comando "step" de Matlab.

5.5.3 Simulación con la planta no lineal

A continuación se resumirán las especificaciones conseguidas para cada subsistema, Tabla 5.1. Resulta de utilidad saber que los tiempos obtenidos son similares a los buscados en otros proyectos e investigaciones con quadrotors, [10]. Se recuerda que estos controles tipo PID, junto con los LQR que se diseñarán en la siguiente sección, serán tomados como referencia de cara al diseño de los controles robustos \mathcal{H}_∞ lineal y no lineal.

Tabla 5.1 Especificaciones conseguidas para el control de actitud del quadrotor (PID), y de posición horizontal (PID) y altitud (PID) de la carga.

Subsistema	Control	t_s [s]	t_e [s]	SO [%]
Actitud quadrotor	PID	0.081	0.095	0
Posición horizontal carga	PID	0.13	0.88	45
Altitud carga	PID	0.05	0.23	33

Para la evaluación de los controles se han ejecutado las simulaciones definidas en la Subsección 5.2.1, usando los generadores de trayectorias ya comentados en dicha sección. Los resultados se muestran de la Figura 5.16 a la Figura 5.25. En ellas, aunque las referencias de los controladores (para los lazos externos) son únicamente la posición x_c y la altitud z_c , sin sus derivadas, se han incluido tanto las derivadas de la posición horizontal y altitud de la carga, como las derivadas de la trayectoria de referencia para una mejor evaluación del comportamiento de los controladores.

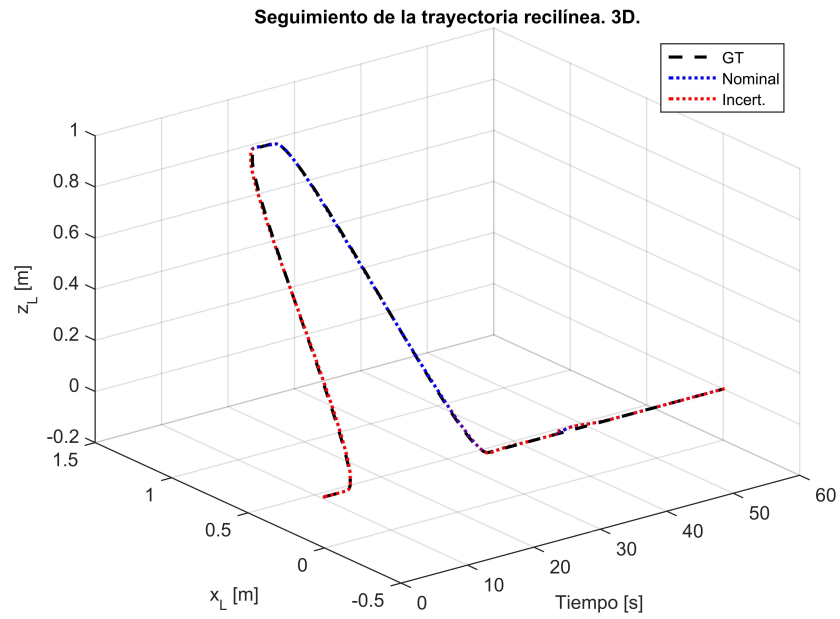
Trayectoria rectilínea:

Figura 5.15 Simulación de los controles PID frente a la planta no lineal y ante la trayectoria rectilínea definida en Subsección 5.2.1. 3 dimensiones.

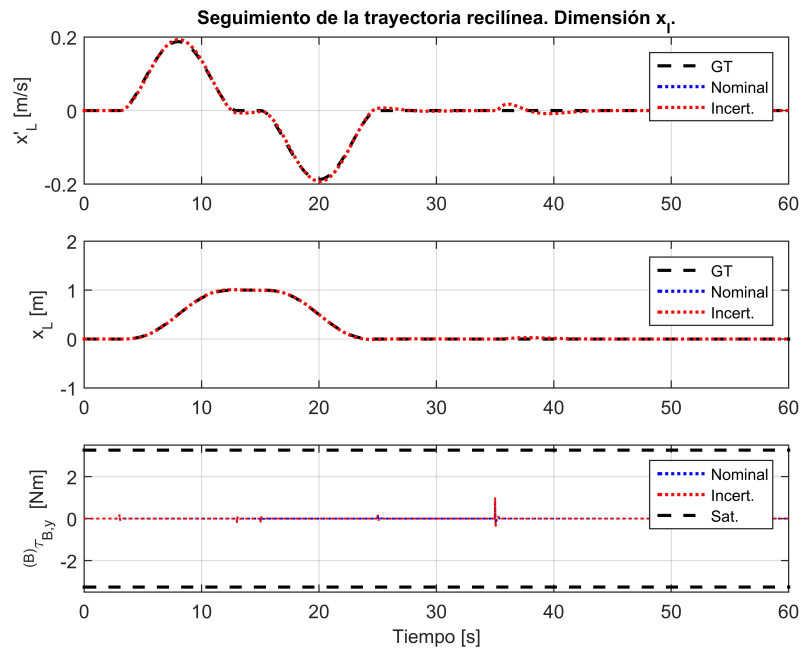


Figura 5.16 Simulación de los controles PID frente a la planta no lineal y ante la trayectoria rectilínea definida en Subsección 5.2.1. Dimensión x_L .

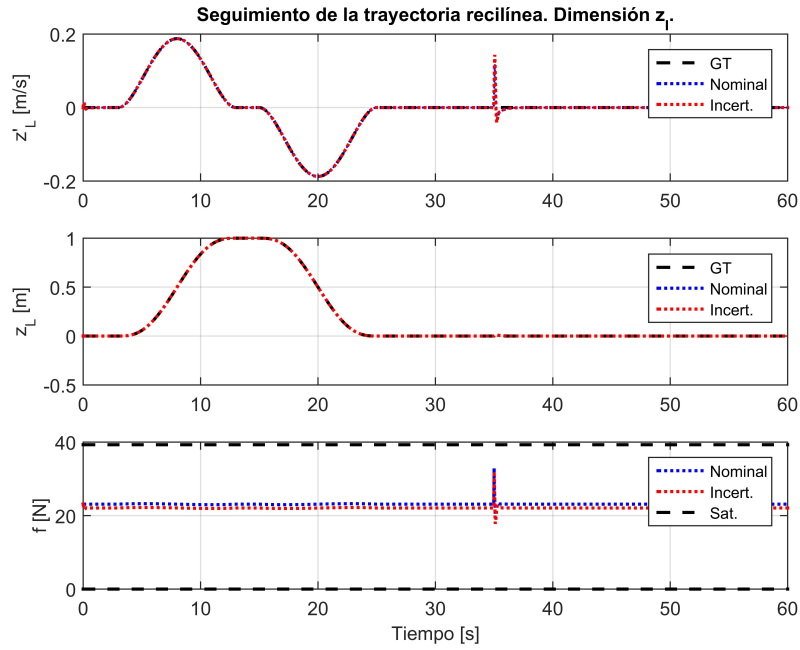


Figura 5.17 Simulación de los controles PID frente a la planta no lineal y ante la trayectoria rectilínea definida en Subsección 5.2.1. Dimensión z_L .

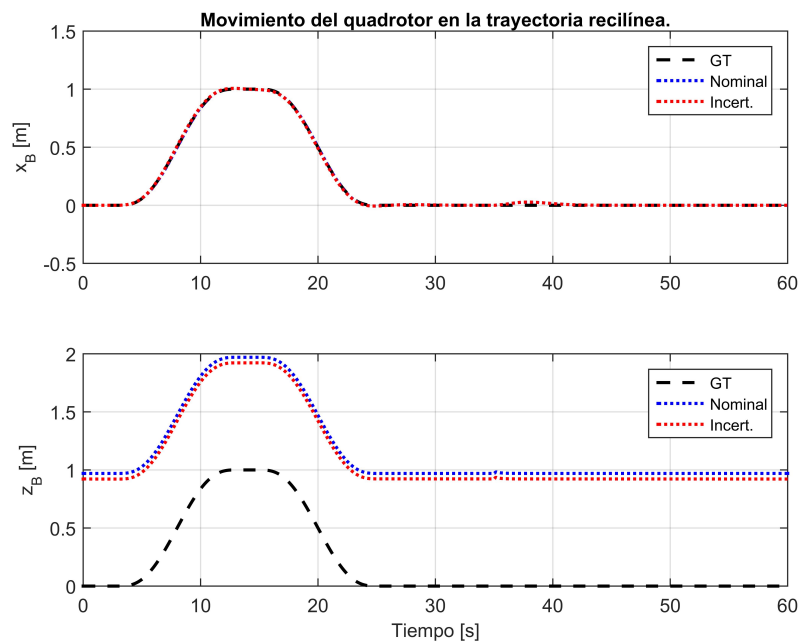


Figura 5.18 Simulación de los controles PID frente a la planta no lineal y ante la trayectoria rectilínea definida en Subsección 5.2.1. Movimiento del quadrotor.

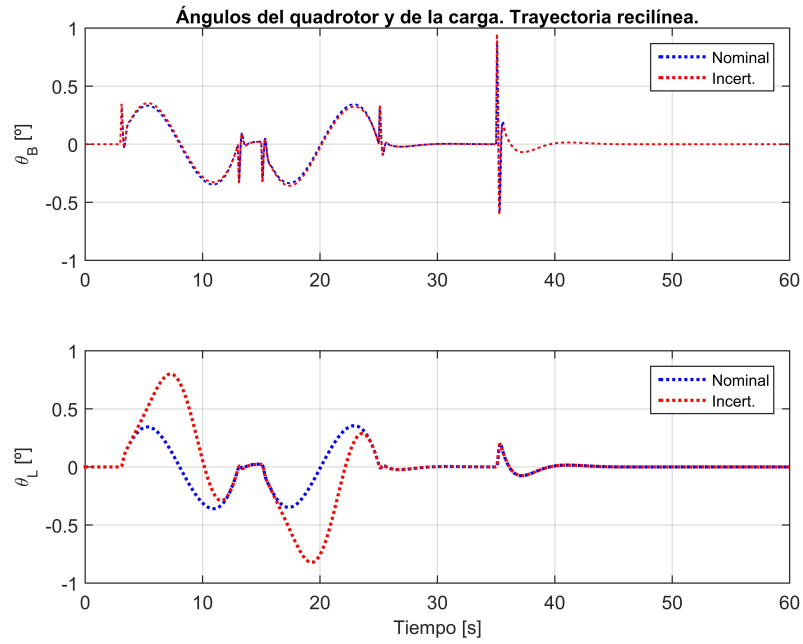


Figura 5.19 Simulación de los controles PID frente a la planta no lineal y ante la trayectoria rectilínea definida en Subsección 5.2.1. Ángulos θ_B y θ_L .

Trayectoria Circular:

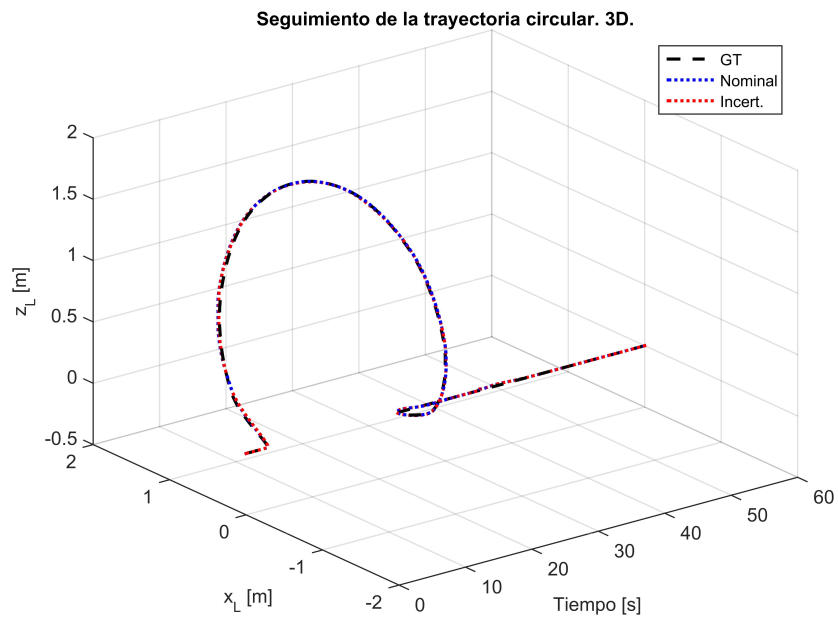


Figura 5.20 Simulación de los controles PID frente a la planta no lineal y ante la trayectoria circular definida en Subsección 5.2.1. 3 dimensiones.

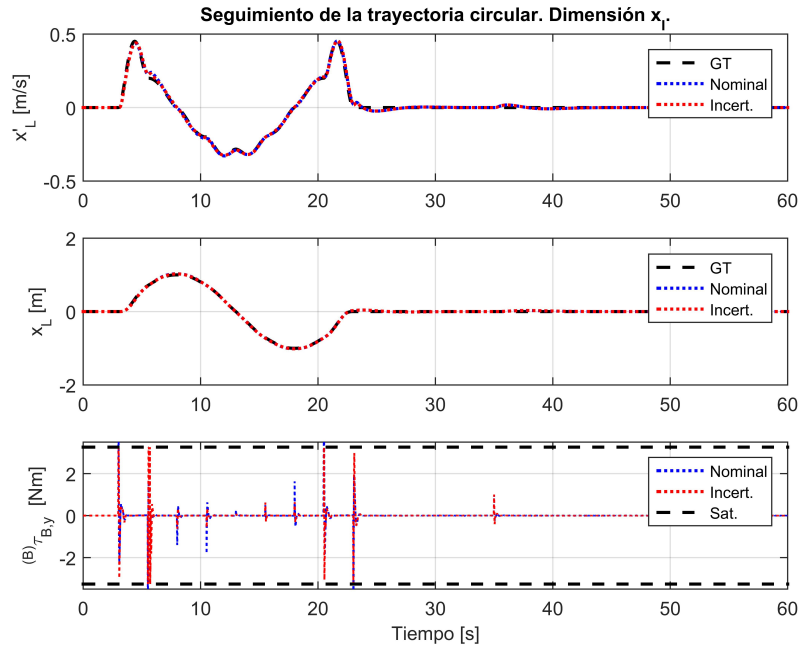


Figura 5.21 Simulación de los controles PID frente a la planta no lineal y ante la trayectoria circular definida en Subsección 5.2.1. Dimensión x_L .

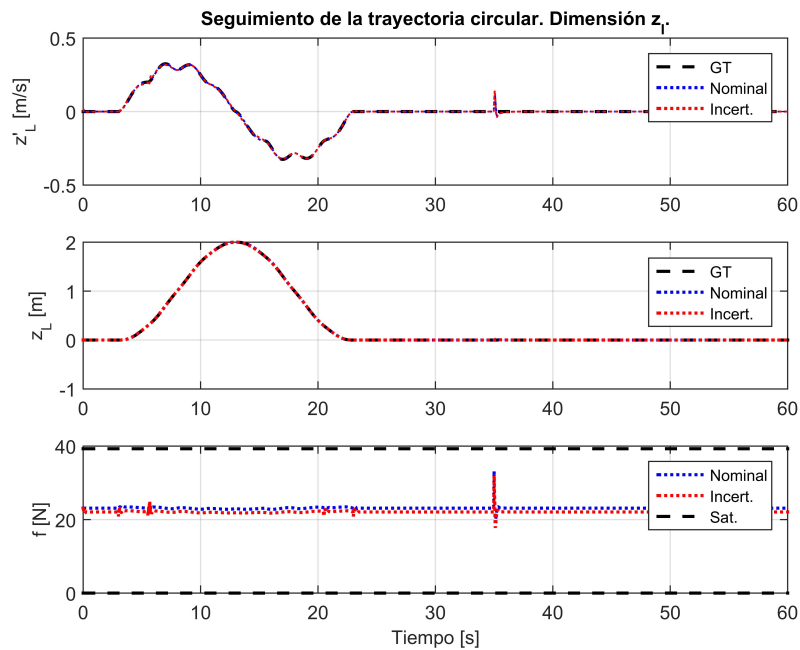


Figura 5.22 Simulación de los controles PID frente a la planta no lineal y ante la trayectoria circular definida en Subsección 5.2.1. Dimensión z_L .

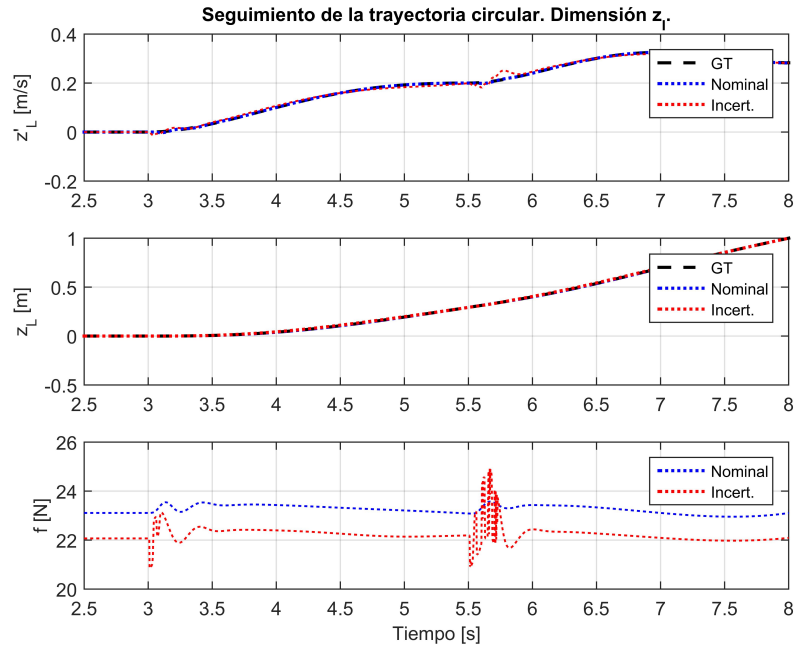


Figura 5.23 Simulación de los controles PID frente a la planta no lineal y ante la trayectoria circular definida en Subsección 5.2.1. Dimensión z_I con zoom.

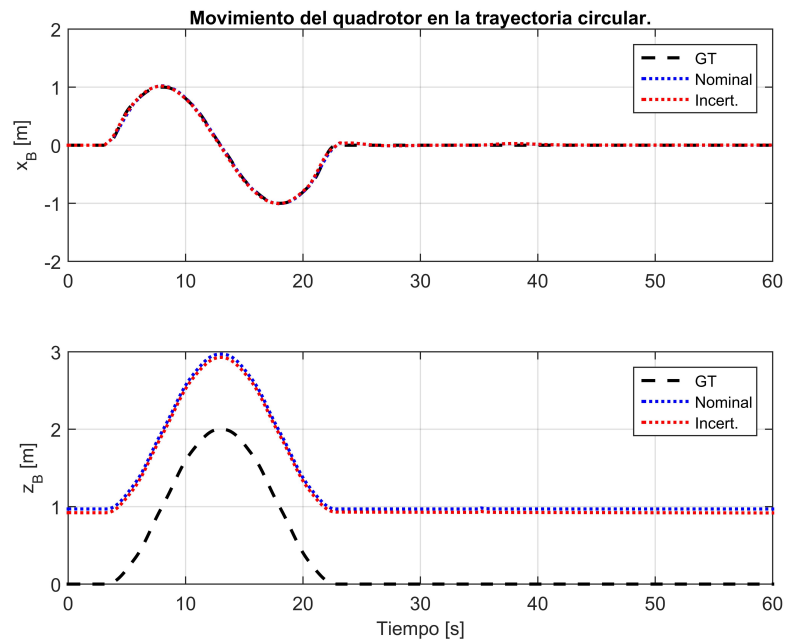


Figura 5.24 Simulación de los controles PID frente a la planta no lineal y ante la trayectoria circular definida en Subsección 5.2.1. Movimiento del quadrotor.

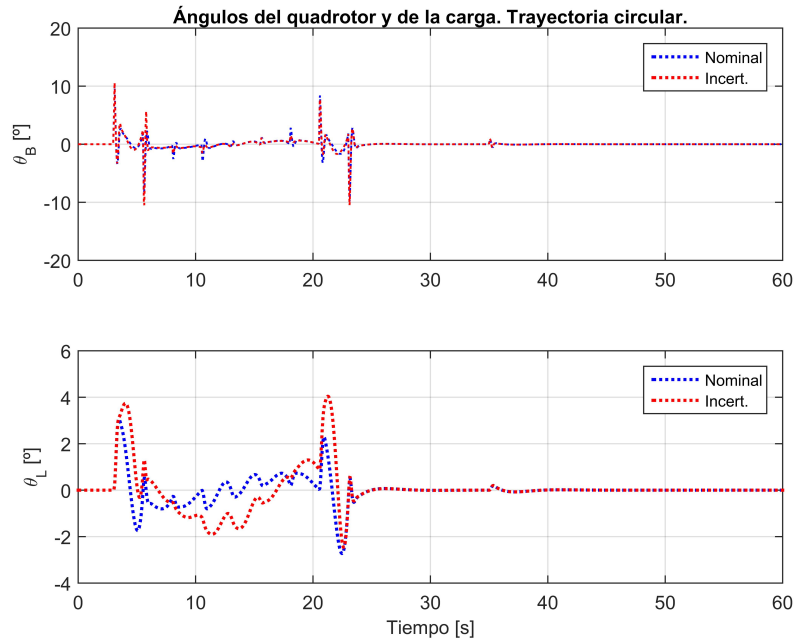


Figura 5.25 Simulación de los controles PID frente a la planta no lineal y ante la trayectoria circular definida en Subsección 5.2.1. Ángulos θ_B y θ_L .

Índice de bondad ISE:

Tabla 5.2 Índices de bondad para las simulaciones de los controles PID de posición y altitud.

ISE	T. rectilínea		T. circular	
	x_c [m ²]	z_c [m ²]	x_c [m ²]	z_c [m ²]
Nominal	$3.397 \cdot 10^{-3}$	$4.48 \cdot 10^{-5}$	$9.656 \cdot 10^{-3}$	$4.513 \cdot 10^{-5}$
Incertidumbre	$3.404 \cdot 10^{-3}$	$4.603 \cdot 10^{-5}$	$9.869 \cdot 10^{-3}$	$4.714 \cdot 10^{-5}$

Mirando las imágenes y los índices de bondad conseguidos, se notan menores errores de seguimiento y de rechazo de perturbaciones en el control de altitud que en el control de posición horizontal para ambas trayectorias. Esto se debe principalmente a que la dinámica, al igual que el efecto integral, del control de altitud son más agresivos que los del control de posición horizontal.

Las saturaciones se alcanzan para la trayectoria circular, en donde ocurren los cambios más bruscos de aceleración. Aunque se tiene diseñado un Anti-Windup, no ha sido necesario activarlo puesto que la respuesta no se ha visto degradada.

Las oscilaciones observadas en Figura 5.23 se deben al alcance de las saturaciones en el subsistema de posición horizontal, ya que aunque se hayan considerados dos actuaciones distintas, ${}^{(c)}\tau_{L,y}$ y f , ambas están relacionadas según la ecuación (2.1).

Resulta curioso observar que la trayectoria que describe el quadrotor no presenta oscilaciones.

En todo caso, los comportamientos nominales y con incertidumbres son muy similares. Las mayores diferencias se encuentran en el ángulo que adquiere la carga θ_C , aunque estas entran dentro de los valores esperados. Por tanto, se puede concluir estabilidad y comportamientos robustos para este experimento.

5.6 Control lineal óptimo LQR con efecto integral

El desarrollo de los controles LQR está basado principalmente en las fuentes bibliográficas [16], [34], [30]. Aunque no se entrará en demasiados detalles teóricos, pues se considera ya bien conocido el problema del regulador LQR, en las citadas fuentes se puede encontrar un desarrollo algo más extendido.

En lo que se refiere al tipo de estructura de control, para el subsistema de altura se diseñará un único control LQR, mientras que para el control horizontal de la carga se han considerado dos opciones: un único control LQR, o un control en cascada, manteniendo el control PID diseñado anteriormente para el lazo de actitud del quadrotor, y diseñando un control LQR para el lazo externo de la posición horizontal de la carga, Figura 5.10. Tras algunas pruebas se encontró que la dificultad de sintonización de los controles LQR, así como los índices de rendimiento obtenidos en simulaciones para el seguimiento de trayectorias eran muy similares. No obstante, la complejidad para conseguir un buen comportamiento del sistema frente a perturbaciones era bastante mayor para la opción de un único control LQR. Por tanto, se decidió mantener la estructura en cascada, manteniendo a su vez el control PID para el lazo de actitud del quadrotor ya diseñado anteriormente, y aplicando un control LQR únicamente para el lazo externo del control horizontal de la carga.

Incluyendo el lazo interno del control de actitud del quadrotor dentro de la planta, el sistema a controlar puede representarse tal y como se muestra en la Figura 5.26.

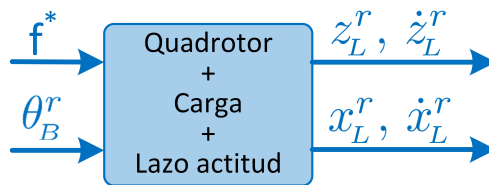


Figura 5.26 Esquema tipo caja negra de la planta a controlar por el control LQR.

En primer lugar se abordará la descripción en el espacio de estados y el control del subsistema de posición horizontal x_C , y posteriormente del subsistema de altitud z_C . No obstante, de manera previa se desarrollarán brevemente algunos aspectos teóricos necesarios: se avanzará desde el problema de regulación LQR hasta el problema de seguimiento con efecto integral (LQRt-I). Además, se avanza que el subsistema de posición horizontal consta de 6 estados, no completamente medibles. Como se puede ver en la Figura 5.26, solo 2 de estos 6 estados serán medibles, lo que exigirá un observador de orden mínimo. Las nociones sobre observadores de orden mínimo se incluirán dentro de los

aspectos teóricos previos al diseño de los controles LQR.

5.6.1 Control de seguimiento con efecto integral LQRt-I: definición

Para avanzar gradualmente de manera didáctica hasta el control de seguimiento (tracking) LQR con efecto integral (LQRt-I) se comenzará con la definición del problema del regulador óptimo LQR.

Como breve recordatorio, los reguladores del tipo LQR se basan en una definición del sistema en el espacio de estados "SS":

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \quad (5.10)$$

Resumidamente, el objetivo de este problema será estabilizar el sistema en torno al punto de equilibrio. Para ello, a través de una señal de control de la forma $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ se tratará de minimizar función de coste cuadrática \mathbf{J} , que en su versión de horizonte infinito adquiere la forma, [16]:

$$\mathbf{J} = \int_0^\infty (\mathbf{x}^\top \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^\top \mathbf{R}\mathbf{u} + 2\mathbf{u}^\top \mathbf{N}\mathbf{x}) dt \quad (5.11)$$

donde $\mathbf{Q} \geq 0$, $\mathbf{R} > 0$, y $\mathbf{N} \geq 0$ son matrices constantes simétricas definidas (o semidefinidas) positivas.

Substituyendo $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ en la anterior función de coste \mathbf{J} , y desarrollando, se llega a una ecuación de Riccati, a través de la cual se puede hallar la matriz óptima \mathbf{K} que minimiza \mathbf{J} . En este proyecto, la resolución de la ecuación de Riccati se realizará usando la función "lqr()" de Matlab.

Si se quiere pasar de un problema de regulación a un problema de seguimiento, bastaría con formular el siguiente cambio de variables: $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_r$, y $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_r$, con \mathbf{x}_r refiriéndose al estado de referencia, y \mathbf{u}_r a la señal de control de referencia. De este modo, el estado del nuevo sistema será cero si se sigue la referencia especificada.

La matriz óptima \mathbf{K} que minimiza la función de coste \mathbf{J} se obtendría exactamente de la misma manera que para el problema de regulación (se volvería a usar la función "lqr()" de Matlab). La señal de control que habría que aplicar sobre el sistema original para el seguimiento de la trayectoria sería:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) + \mathbf{u}_r \quad (5.12)$$

Merece la pena detenerse en este punto para analizar dos cuestiones. La primera trata sobre la necesidad de conocer todos los estados del sistema para el cálculo de $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r)$. En caso de que no todos los estados sean medibles directamente a la salida del sistema, será necesario el diseño y uso de un observador de estados, siempre y cuando la observabilidad del sistema lo permita. La segunda cuestión está relacionada con que la señal de control incluye un término de compensación (feedforward) \mathbf{u}_r basado en las referencias, así como otro término relacionado con los estados de referencia. Para calcular estos términos se ha de resolver un sistema del tipo (5.10) tal y como se

muestra a continuación, [30]:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ u_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ y_r \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

siendo y_r la señal de referencia para la salida del sistema, y las matrices A , B , C y D las matrices que definen la dinámica del sistema en cuestión (x_c ó z_c).

Si se resuelve la ecuación anterior, se tiene:

$$x_r = T_x \begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ y_r \end{bmatrix}; \quad u_r = T_u \begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ y_r \end{bmatrix}$$

Por último quedaría por resolver el problema del control LQRt con efecto integral (LQRt-I). Para ello se volverá a realizar un cambio de variables. Ahora se aumentará el sistema definido en el problema de seguimiento para incluir la integral del error de la salida con respecto a la referencia, [16], [30]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_I &= y - y_r; \quad x_I = \int (y - y_r) dt \\ \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{x}_I \end{bmatrix} &= A_A \begin{bmatrix} \bar{x} \\ x_I \end{bmatrix} + B_A \bar{u} \\ \begin{bmatrix} \bar{x} \\ x_I \end{bmatrix} &= C_A \begin{bmatrix} \bar{x} \\ x_I \end{bmatrix} + D_A \bar{u} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.14)$$

con:

$$A_A = \begin{bmatrix} A & \mathbb{O} \\ C & \mathbb{O} \end{bmatrix}; \quad B_A = \begin{bmatrix} B \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}; \quad C_A = [C \quad \mathbb{O}]; \quad D_A = [\mathbb{O}];$$

De nuevo, se procedería a hallar la matriz óptima K_A que minimiza la función de coste J (con la función "lqr()" de Matlab). La señal de control tendría la siguiente forma:

$$\bar{u} = -K_A \begin{bmatrix} \bar{x} \\ x_I \end{bmatrix}; \quad K_A = [K_{PD} \quad K_I]$$

Finalmente, la señal de control con efecto integral a aplicar sobre el sistema original para el seguimiento de la trayectoria sería la siguiente:

$$\begin{aligned} u(s) &= -K_{PD} (x - x_r) - K_I (s^{-1} \mathbb{I}) (y - y_r) + u_r \\ &\quad \Downarrow \\ u(s) &= -(K_{PD} + K_I (s^{-1} \mathbb{I}) C) (x - x_r) + u_r \end{aligned} \quad (5.15)$$

5.6.2 Observador de orden mínimo y estimador de Kalman

Las nociones sobre el observador de orden mínimo están basadas en las indicaciones y desarrollos mostrados en el libro "*Ingeniería de Control Moderna*", [34].

El diseño de un observador de orden mínimo es análogo al diseño de un observador de orden completo. Inicialmente se habrá de reordenar el sistema de partida (que no el ampliado), separando los estados medibles x_a , de los no medibles x_b . Posteriormente se diseña un observador de orden completo sobre este sistema reordenado.

El sistema reordenado tomaría la forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ A_{ba} & A_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \end{bmatrix} u \\ &\Downarrow \\ \begin{cases} \dot{x}_b &= A_{bb} x_b + [A_{ba} \ B_b] \begin{bmatrix} x_a \\ u \end{bmatrix} \\ \dot{x}_a - A_{aa} x_a - B_a u &= A_{ab} x_b \end{cases} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Como se puede ver, el sistema (5.16) tiene una forma similar a un sistema tipo (5.10), siendo sencillo realizar equivalencias entre las matrices de ambos sistemas. Se remarca de nuevo que este paso es previo a la adición del efecto integral. Es decir, las matrices A_{aa} , A_{ba} , A_{ab} , A_{bb} , B_a y B_b se obtienen a partir de las matrices A y B del sistema de partida, (5.10).

Se recuerda ahora la definición en el espacio de estados de un observador de orden completo:

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC) \tilde{x} + [L \ B] \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}$$

donde \tilde{x} se refiere a los estados estimados por el observador, y L a la ganancia del observador. Como ya se sabe, "*el modelo matemático del observador es básicamente el mismo que el de la planta, salvo que se incluye un término adicional que contiene el error de estimación para compensar las imprecisiones en las matrices A y B y la falta del error inicial. El error de estimación o error de observación es la diferencia entre la salida medida y la salida estimada. El error inicial es la diferencia entre el estado inicial y el estado estimado inicial.*", [34]. Este término de compensación es $L(y - C\tilde{x})$. Además, puesto que $(\dot{\hat{x}} - \dot{\tilde{x}}) = (A - LC)(x - \tilde{x})$, a través de L se establece la dinámica de convergencia a 0 del error de estimación.

Tras este breve recordatorio, se actuará sobre (5.16) aplicando un observador de orden completo, pues se requiere hallar todos los estados de este sistema reordenado, x_b . El modelo matemático del observador quedaría entonces tal y como sigue:

$$\dot{\tilde{x}}_b = (A_{bb} - L A_{ab}) \tilde{x}_b + [L \ A_{ba} \ B_b] \begin{bmatrix} \dot{x}_a - A_{aa} x_a - B_a u \\ x_a \\ u \end{bmatrix}$$

El diseño del observador de orden mínimo estaría ya definido. Sin embargo, sería recomendable eliminar el término $\dot{\tilde{x}}_a$ a la entrada del observador para evitar amplificaciones de ruidos. Para ello, se reordenará la ecuación anterior:

$$\dot{\tilde{x}}_b - L \dot{\tilde{x}}_a = (A_{bb} - L A_{ab}) (\tilde{x}_b - L x_a) + \begin{bmatrix} (A_{bb} - L A_{ab}) L + A_{ba} - L A_{aa} \\ B_b - L B_a \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} x_a \\ u \end{bmatrix}$$

A continuación se realizará un cambio de variables para que el modelo matemático del observador de orden mínimo sea más manejable. Se definen las siguientes variables:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} &= \tilde{x}_b - L x_a & \widehat{F} &= B_b - L B_a \\ \tilde{x} &= [x_a \ x_b]^\top & \widehat{C} &= [\mathbb{O} \ \mathbb{I}]^\top \\ \widehat{A} &= A_{bb} - L A_{ab} & \widehat{D} &= [\mathbb{I} \ L]^\top \\ \widehat{B} &= \widehat{A} L + A_{ba} - L A_{aa} \end{aligned}$$

Finalmente, el modelo matemático en el espacio de estados para el observador de orden mínimo queda según sigue:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\eta}} = \widehat{A} \tilde{\eta} + [\widehat{B} \ \widehat{F}] \begin{bmatrix} x_a \\ u \end{bmatrix} \\ \tilde{x} = \widehat{C} \tilde{\eta} + [\widehat{D} \ \mathbb{O}] \begin{bmatrix} x_a \\ u \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.17)$$

En este proyecto se ha decidido emplear un estimador óptimo, o estimador de Kalman, LQE (Optimal State Estimation).

El filtro de Kalman, [16], es el mejor de los estimadores posibles para una planta alterada por ruidos w y v :

$$\begin{cases} \dot{x} = A x + B u + w \\ y = C x + D u + v \end{cases} \quad (5.18)$$

Estos ruidos son procesos estocásticos Gaussianos de media cero no correlacionados en el tiempo ni entre sí, con covarianzas $E(w w^\top) = Q_o$ y $E(v v^\top) = R_o$. El problema consiste en tratar de construir un estado estimado \tilde{x} que minimice la covarianza del error estático:

$$P = \lim_{t \rightarrow \infty} E(\{x - \tilde{x}\} \{x - \tilde{x}\}^\top)$$

La solución óptima correspondería a la ganancia del estimador de Kalman, que vendría dada por: $L = P C^\top R_o^{-1}$, donde P es la solución de la ecuación algebraica de Riccati siguiente:

$$AP + PA^\top - PC^\top R_o^{-1} CP + Q_o = \mathbb{O}$$

Cuando se combina un estimador óptimo (estimador de Kalman LQE), con un regulador óptimo LQR, se llega a un control del tipo LQG (Linear Quadratic Gaussian). Puesto que en este proyecto se aborda el problema de seguimiento con efecto integral, al final se llegará a un control tipo LQGt-I. Por otro lado, por el *Principio de Separación*, [16], es posible diseñar las ganancias del control LQRt-I, K_A , y la ganancia del observador L de manera independiente. En este caso, para la obtención de la ganancia del estimador óptimo L se empleará la función "lqe()" de Matlab.

Un efecto adverso de la inclusión de un observador a un regulador LQR es el deterioro de las propiedades de robustez del mismo, [16]. Mientras que para el regulador LQR en bucle abierto se garantizan 60° de margen de fase, y entre 1/2 db e infinito de margen de ganancia, en el regulador LQG no existen límites de robustez. Como se ve, a pesar de contar con un regulador y observador óptimos de manera independiente, el sistema conjunto no lo es. A través del método de Doyle y Stein, se puede modificar (aumentar) la matriz de covarianza Q_o para tratar de recuperar la función de transferencia del regulador LQR en las frecuencias deseadas: $G_{ba}^{LQG} \rightarrow G_{ba}^{LQR}$. Es lo que se conoce como LTR (Loop Transfer Recovery).

Merece la pena resaltar que se deberá de recuperar la fase del sistema considerando las fdt del problema de regulación (no se consideran las referencias) en bucle abierto, ya sea con o sin efecto integral. A continuación se recordarán sus expresiones.

Se define el parámetro $K_c(s)$ como $K_c(s) = K_{PD}$, (5.12), ó como $K_c(s) = (K_{PD} + K_I (s^{-1} \mathbb{I}) C)$, (5.15), dependiendo de si prefiere el uso de las fdt sin o con efecto integral respectivamente. Se definen también las siguientes fdt:

$$\begin{aligned} G_p(s) &= C (s \mathbb{I} - A)^{-1} B \\ G_{p_x}(s) &= (s \mathbb{I} - A)^{-1} B \\ G_{ob}(s) &= \widehat{D} + \widehat{C} (s \mathbb{I} - \widehat{A} + \widehat{F} K_c(s) \widehat{C})^{-1} (\widehat{B} - \widehat{F} K_c(s) \widehat{D}) \end{aligned}$$

donde $G_p(s)$ es la fdt de la planta, $G_{p_x}(s)$ la fdt de la planta con todos los estados como salidas, y $G_{ob}(s)$ la del observador.

Con estas definiciones, las fdt del problema de regulación quedan:

$$\begin{aligned} G_{ba}^{LQR-(I)}(s) &= K_c(s) G_{p_x}(s) \\ G_{ba}^{LQG-(I)}(s) &= K_c(s) G_{ob}(s) G_p(s) \end{aligned}$$

donde el paréntesis ^(I) indica la opción de incluir o no el efecto integral en $K_c(s)$.

Por otro lado, para las fdt en bucle abierto del control de seguimiento se despreciará el término u_r de (5.12) y (5.15), puesto que únicamente se usarán para simular respuestas en escalón. No obstante, para las simulaciones con la planta no lineal sí que se usará este término, pudiéndose hallar a través de la relación (5.13). Las fdt en bucle abierto del control de seguimiento mostradas a continuación se han obtenido a través de las conexiones entre los sistemas (5.17), (5.10), y con la

señal de control $u(s) = K_c(s) (x - x_r)$:

$$G_{ba}^{LQRt-(I)}(s) = \frac{x(s)}{x_r(s)} = G_{p_x}(s) K_c(s)$$

$$G_{ba}^{LQGt-(I)}(s) = \frac{x(s)}{x_r(s)} = \left[\widehat{D} G_p(s) + \widehat{C} (s \mathbb{I} - \widehat{A})^{-1} (\widehat{B} G_p(s) + \widehat{F}) \right] K_c(s)$$

con:

$$\frac{y(s)}{y_r(s)} = C \frac{x(s)}{x_r(s)} T_x$$

5.6.3 Lazo externo del control de posición horizontal de la carga

Como se apuntó anteriormente, el primer paso a realizar sería trasladar la fdt de la planta, $^{pos}G_{ba_3}(s) = x_{\mathcal{L}}(s)/\theta_{\mathcal{B}}^r(s)$ de (5.7) en este caso, a su descripción en el espacio de estados. Aunque existen distintas representaciones en el espacio de estados (formas canónicas controlable, observable, diagonal, de Jordan, etc., [34]), se ha optado por una representación con significado físico, realizando esta traslación de manera manual:

$$\begin{aligned} \tau_{x_{\mathcal{L}}} &= \frac{l m_{\mathcal{B}}}{m g}; \quad p_{x_{\mathcal{L}}} = \frac{K_1 K_2}{({}^{\mathcal{B}}I_{\mathcal{B}}^{yy} \tau_{x_{\mathcal{L}}})}; \\ \left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_{\mathcal{L}} \\ \ddot{x}_{\mathcal{L}} \\ x_{\mathcal{L}}^{\text{III}} \\ x_{\mathcal{L}}^{\text{IV}} \\ x_{\mathcal{L}}^{\text{V}} \\ x_{\mathcal{L}}^{\text{VI}} \end{bmatrix} &= -p_{x_{\mathcal{L}}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{K_2} & \left(\tau_{x_{\mathcal{L}}} + \frac{{}^{\mathcal{B}}I_{\mathcal{B}}^{yy}}{K_1 K_2} \right) & \frac{\tau_{x_{\mathcal{L}}}}{K_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\mathcal{L}} \\ \dot{x}_{\mathcal{L}} \\ \ddot{x}_{\mathcal{L}} \\ x_{\mathcal{L}}^{\text{III}} \\ x_{\mathcal{L}}^{\text{IV}} \\ x_{\mathcal{L}}^{\text{V}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_{x_{\mathcal{L}}} \end{bmatrix} \theta_{\mathcal{B}}^r \\ \\ \begin{bmatrix} x_{\mathcal{L}} \\ \dot{x}_{\mathcal{L}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\mathcal{L}} \\ \dot{x}_{\mathcal{L}} \\ \ddot{x}_{\mathcal{L}} \\ x_{\mathcal{L}}^{\text{III}} \\ x_{\mathcal{L}}^{\text{IV}} \\ x_{\mathcal{L}}^{\text{V}} \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (5.19)$$

donde las líneas discontinuas dividen el SS en estados medibles ($x_{\mathcal{L}}$ y $\dot{x}_{\mathcal{L}}$) y no medibles (el resto).

Las matrices de observabilidad y controlabilidad son de rango completo, confirmando la observabilidad y controlabilidad del subsistema x_c .

Como se comentó anteriormente, para el diseño de un control por realimentación del vector de estados será necesario tener disponible todos los estados del sistema. En este caso solo se dispone de las medidas de 2 de los 6 estados: la posición horizontal de la carga y su velocidad. Por tanto, puesto que el sistema es totalmente observable, se diseñará un observador de orden mínimo.

Recopilando, los pasos a seguir para el diseño del control LQGt-I sobre la planta (5.19) son:

- Diseño de las ganancias $K_A = [K_{PD} \ K_I]$ de la señal de control a aplicar, (5.15), sobre el sistema de partida, (5.19). Se ha usado la función "lqr()" de Matlab considerando el sistema ampliado (5.14), e iterando con las matrices Q y R de la función de coste (5.11). Las matrices de covarianza usadas y las ganancias de control halladas han sido:

$$Q = \text{diag}([1 \ 1 \cdot 10^7 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \cdot 10^8 \ 0]); \quad R = 1 \cdot 10^6$$

$$\begin{aligned} K_{PD} &= [11.18 \ 6.25 \ 1.38 \ 0.20 \ 7.34 \cdot 10^{-3} \ 1.05 \cdot 10^{-4}] \\ K_I &= [10 \ 0] \end{aligned}$$

- Diseño de la ganancia del estimador de Kalman, L , usando la función "lqe()" de Matlab. Ajuste posterior de la fase del sistema en bucle abierto tal que $G_{ba}^{LQG} \rightarrow G_{ba}^{LQR}$ para la frecuencia de corte. Se ha iterado con Q_o . Las matrices de covarianza y la ganancia del observador óptimo encontrada han sido:

$$Q_o = \text{diag}([1 \ 1 \ 1 \ 2.7803 \cdot 10^{20}]); \quad R_o = \mathbb{I}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 877.51 \\ 0 & 3.85 \cdot 10^5 \\ 0 & 9.60 \cdot 10^7 \\ 0 & 1.013 \cdot 10^{10} \end{bmatrix}$$

A continuación se comparan los márgenes de fase y de ganancia de los problemas de regulación LQR y LQG para la posición horizontal de la carga, Figura 5.27. Con el observador se pierden 0.6 dB en el margen de ganancia, y 6.6° en el margen de fase. En ambos casos los márgenes son válidos para los propósitos perseguidos. A pesar de que los márgenes de ganancia sean negativos, se ha comprobado a través del diagrama de Nyquist que el sistema es estable.

Los márgenes fase y de ganancia del problema de seguimiento para el estado x_c se muestran en la Figura 5.28. No obstante, no podrán tenerse conclusiones del todo fiables sobre este diagrama de Bode puesto que el control LQGt-I consiste en un control por realimentación de todos los estados del sistema, constituyendo, por tanto, un sistema multivariable en donde todos los estados influirán unos sobre otros en mayor o menor medida. Aun así, se analizarán los márgenes de fase y de ganancia sobre el estado correspondiente a x_c , aunque sin dejar de considerar la dudosa fiabilidad de los mismos.

Comparando el diagrama de bode LQGt-I, Figura 5.28, con el correspondiente al PID de la sección anterior, Figura 5.11, con el control LQGt-I se consigue un mayor margen de fase, 156° frente a 32.8° , y una menor frecuencia de corte, 6.31 rad/s frente a 11.2 rad/s . En el caso del control LQGt-I, la pendiente con la que la curva de ganancia corta la línea de 0 dB es de -60 dB/dec , mientras que para el caso PID es de -20 dB/dec . La pendiente a bajas y altas frecuencias coincide en ambos casos, siendo de -60 dB/dec para bajas frecuencias, y de -120 dB/dec para altas frecuencias.

Con los anteriores datos, la frecuencia de corte del control de seguimiento LQGt-I está a 3 rad/s de distancia del pico de resonancia, mientras que el control PID se encontrará a casi 8 rad/s . Esto se traduce en una mayor robustez del control PID en términos de estabilidad frente a incertidumbres que retrasen la frecuencia de corte del sistema. Sin embargo, considerando las incertidumbres estimadas en este proyecto, la distancia de la frecuencia de corte del control LQGt-I al pico de resonancia es lo suficientemente robusta. Por otro lado, el control de seguimiento LQGt-I tendrá mayor margen de fase que el control PID si las incertidumbres provocan un avance de la frecuencia de corte. No obstante, el control de posición horizontal vendría limitado a altas frecuencias por la dinámica del lazo de actitud, cuya frecuencia de corte se recuerda que tiene por valor $^{\text{act}}\omega_{c,ba2} = 21.2 \text{ rad/s}$. Por tanto, se estima que el control LQGt-I será algo más lento que el anterior PID, pero con un comportamiento menos oscilatorio.

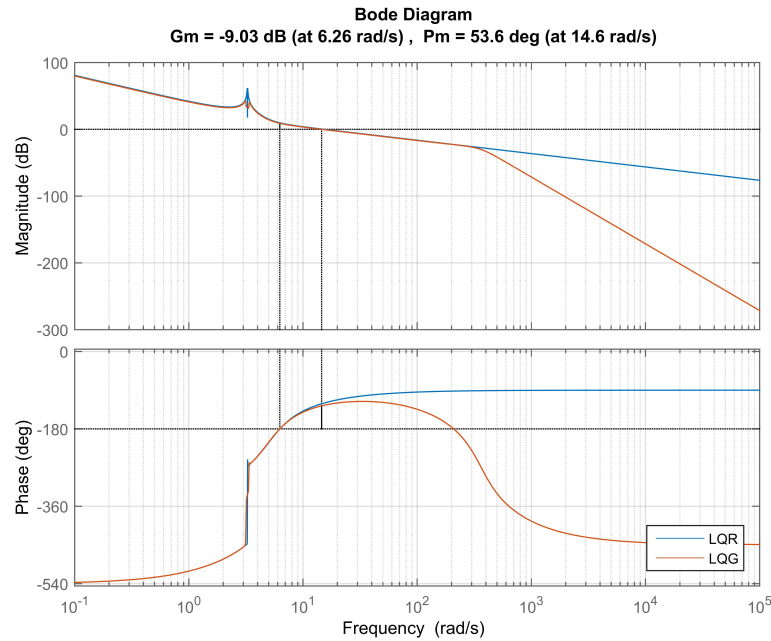


Figura 5.27 Margenes de fase y de ganancia de los problemas de regulación LQR y LQG en el lazo externo de la posición horizontal de la carga en bucle abierto.

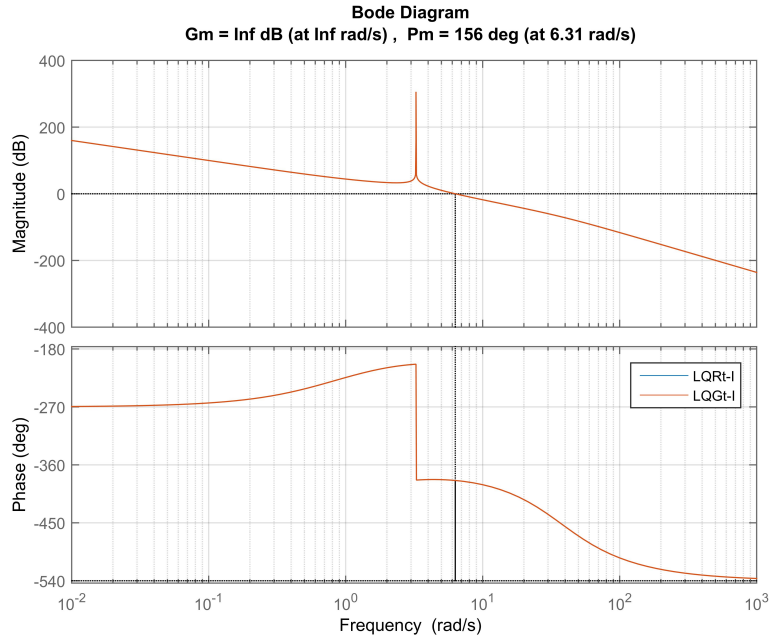


Figura 5.28 Margenes de fase y de ganancia de los problemas de seguimiento LQRt-I y LQGt-I en el lazo externo de la posición horizontal de la carga en bucle abierto.

En la Figura 5.29 se ha simulado el control de seguimiento frente a referencias en escalón para 50 posibles plantas según las incertidumbres. Se tiene una sobre-oscilación del $SO = 40\%$, un tiempo de subida de $t_s = 0.68$ s, y un tiempo de establecimiento de $t_e = 2.78$ s. Como se había estimado, el control LQGt-I de posición horizontal de la carga resulta más lento que el conseguido por el control PID, cuyo tiempo de subida era de $t_s = 0.13$ s. Por otro lado, el control PID presenta un comportamiento más oscilatorio, aunque la sobre-oscilación del control LQGt-I es bastante alta, puede que debido a la cercanía al pico de resonancia. Estas diferencias de comportamiento entre el control LQGt-I y el control PID pueden ser debidas a que el problema de regulación LQR busca una solución cuyo margen de fase garantice $M_f = 60^\circ$, mientras que para el control PID se buscó un margen de fase superior a $M_f \geq 30^\circ$. Además, para el control PID también se buscó una respuesta algo más rápida a la inicialmente deseada para situar la frecuencia de corte más alejada del pico de resonancia.

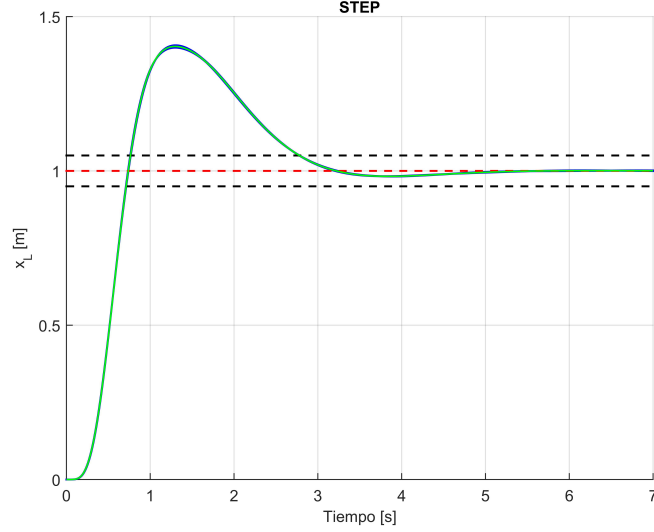


Figura 5.29 Respuesta del control LQGt-I de posición horizontal de la carga ante una familia de plantas lineales. Simulación realizada con el comando "step" de Matlab.

5.6.4 Control de altitud de la carga

En este caso, la transformada $z_L(s)$ de (5.3) tendrá por representación:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{z}_L \\ \ddot{z}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_L \\ \dot{z}_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} f \\ \begin{bmatrix} z_L \\ \dot{z}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_L \\ \dot{z}_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} f \end{cases}$$

Como se puede comprobar, solo existen 2 estados, los cuales son salidas del sistema medibles, por lo que no será necesario el uso de ningún observador de estados.

El proceso a seguir para el diseño de un control LQRt-I ya fue definido al inicio de la sección. Las matrices de covarianza y las ganancias de la ley de control (5.15) encontradas, habiendo considerado el sistema ampliado (5.14), son:

$$\mathbf{Q} = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} 1 \cdot 10^3 & 1 & 1 \cdot 10^9 & 0 \end{bmatrix} \right); \quad \mathbf{R} = 5$$

$$\mathbf{K}_{PD} = \begin{bmatrix} 1556.9 & 85.69 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_I = \begin{bmatrix} 14142 & 0 \end{bmatrix}$$

En la Figura 5.30 se muestran los márgenes de fase y de ganancia del regulador con efecto integral diseñado. Se tiene un margen de fase de $M_f = 60.5^\circ$ y de ganancia de $M_g = -12$ db. Se ha comprobado además la estabilidad a través del diagrama de Nyquist.

Los márgenes de fase y de ganancia del problema de seguimiento para el estado z_c se muestran en la Figura 5.31, aunque habrá que tener en cuenta el aspecto de la fiabilidad de los mismos ya comentado anteriormente. En este caso se obtienen márgenes de fase y de ganancia negativos. Yendo al diagrama de Nyquist, no mostrado por brevedad, se observa sin embargo que el sistema es estable, pues no se encuentra ningún polo en el Semi-Plano Derecho y el número de vueltas en torno a -1 en sentido horario es nulo. En cuanto a la frecuencia de corte, esta se sitúa en torno a la frecuencia de corte obtenida para el control PID, siendo de 26.4 rad/s para el control LQRt-I, y de 25.8 rad/s para el control PID.

Por otra parte, en la Figura 5.32 se muestran las simulaciones del control frente a 50 posibles plantas. Se tiene una sobre-oscilación del $SO = 44\%$, un tiempo de subida de $t_s = 0.077$ s, y un tiempo de establecimiento de $t_e = 0.28$ s. Todos estos valores son muy parecidos a los obtenidos para el control PID: $SO = 33\%$, $t_s = 0.05$ s y $t_e = 0.23$ s. Llama la atención la diferencia del 10 % de oscilación entre ambos controles. Quizás, afinando las matrices de ponderación, y dedicando algo más de tiempo, se podrían llegar a conseguir valores más parecidos a los del PID.

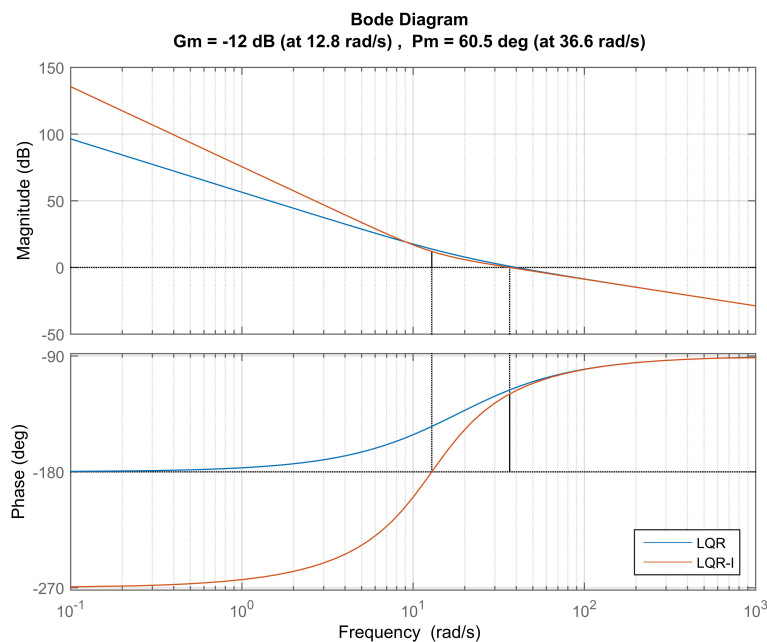


Figura 5.30 Margenes de fase y de ganancia del problema de regulación LQR en el lazo de altitud de la carga en bucle abierto.

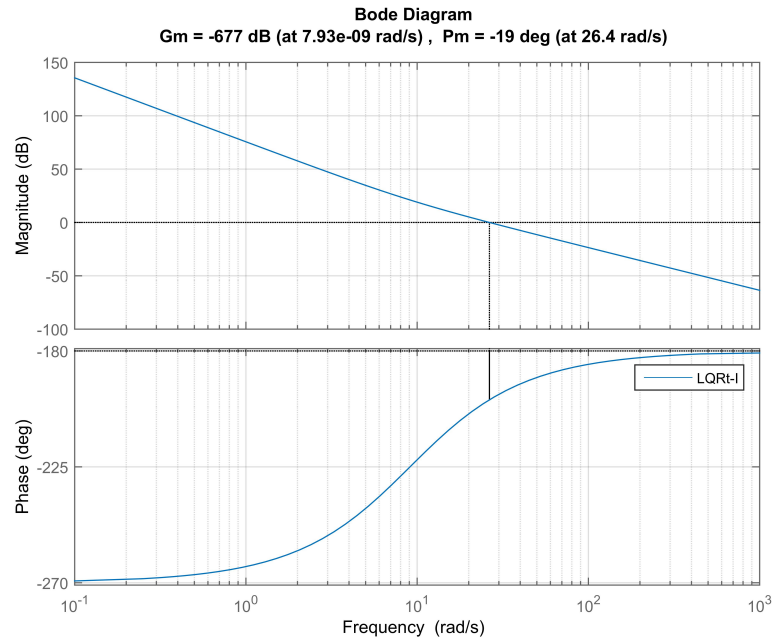


Figura 5.31 Margenes de fase y de ganancia del problema de seguimiento LQRt-I en el lazo de altitud de la carga en bucle abierto.

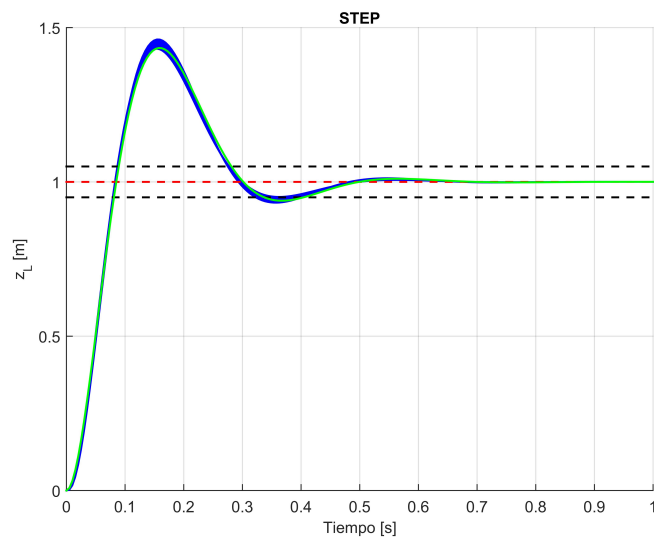


Figura 5.32 Respuesta del control LQRt-I de altitud de la carga ante una familia de plantas lineales. Simulación realizada con el comando "step" de Matlab.

5.6.5 Simulación con la planta no lineal

A continuación se resumen las especificaciones conseguidas para los controles diseñados:

Tabla 5.3 Especificaciones conseguidas para el control de actitud del quadrotor (PID), y de posición horizontal (LQGt-I) y altitud (LQRt-I) de la carga.

Subsistema	Control	t_s [s]	t_e [s]	SO [%]
Actitud quadrotor	PID	0.081	0.095	0
Posición horizontal carga	LQGt-I	0.68	2.78	40
Altitud carga	LQRt-I	0.077	0.28	44

Para la evaluación de los controles se han ejecutado las simulaciones definidas en la Subsección 5.2.1. Los resultados se muestran de la Figura 5.34 a la Figura 5.43. En estas simulaciones se han aplicado las señales de control definidas en (5.15) sobre la planta. Para el caso del control de la posición horizontal de la carga, se ha usado además el observador diseñado, (5.16), a la salida de la planta para tener disponibles todos los estados del sistema.

En este caso, puesto que las salidas de referencia coinciden con los estados de referencia, y puesto que las señales de control son proporcionales al error en los estados, (5.15), se han aportado posiciones, velocidades y aceleraciones de referencia a los controladores. Se ha evitado aportar más derivadas de la referencia debido a la disminución de la precisión del estimador con las derivadas de la trayectoria, y a la disminución de la continuidad con cada derivada de la referencia. Además, atendiendo a las ganancias de los controladores, los errores de posición, velocidad y aceleración son más importantes que los del resto de derivadas de la trayectoria. Por otro lado, se ha incluido el término u_r de (5.15) a través de la ecuación (5.13).

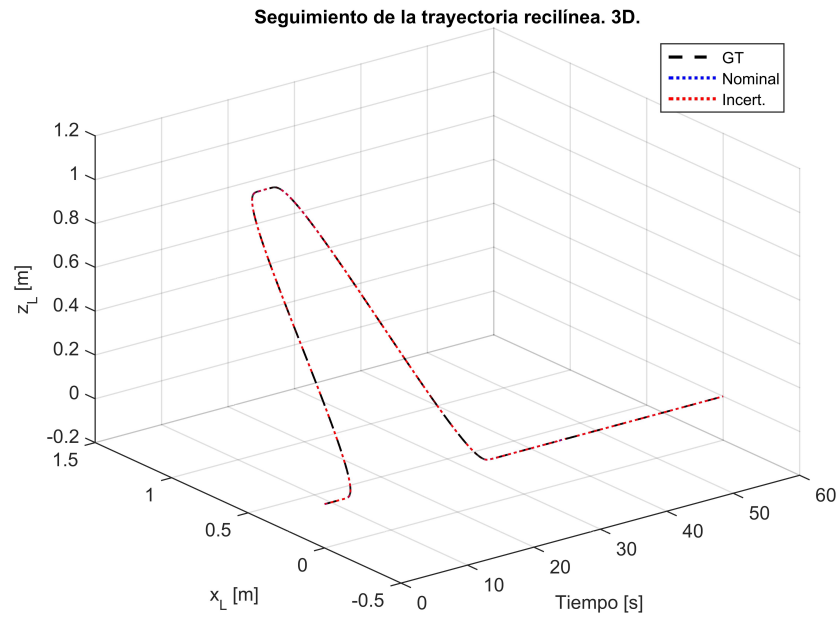
Trayectoria rectilínea:

Figura 5.33 Simulación de los controles LQR frente a la planta no lineal y ante la trayectoria rectilínea definida en Subsección 5.2.1. 3 dimensiones.

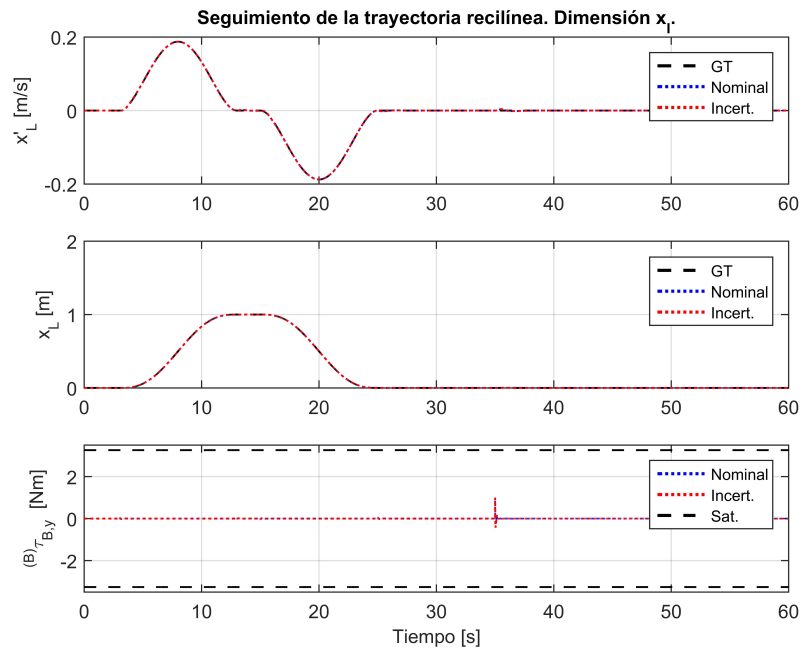


Figura 5.34 Simulación de los controles LQR frente a la planta no lineal y ante la trayectoria rectilínea definida en Subsección 5.2.1. Dimensión x_L .

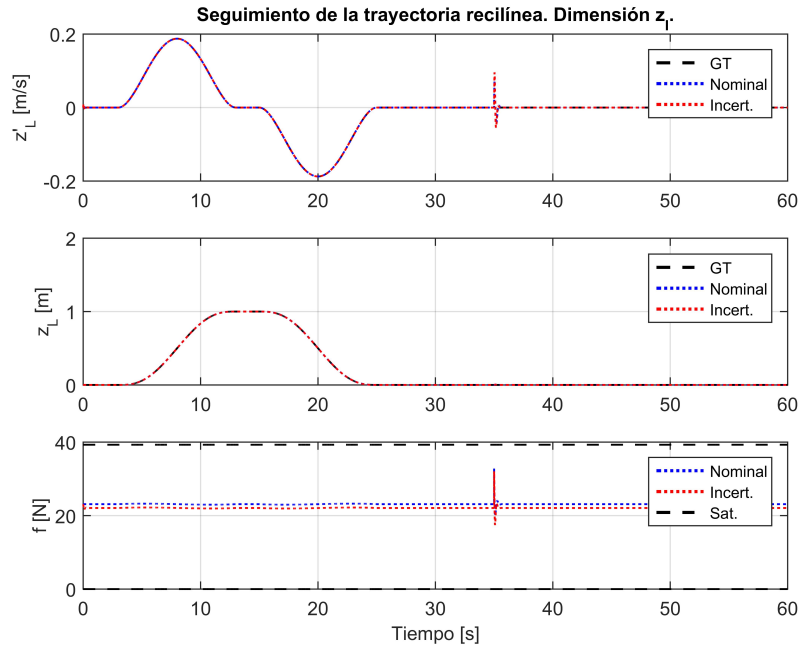


Figura 5.35 Simulación de los controles LQR frente a la planta no lineal y ante la trayectoria rectilínea definida en Subsección 5.2.1. Dimensión z_L .

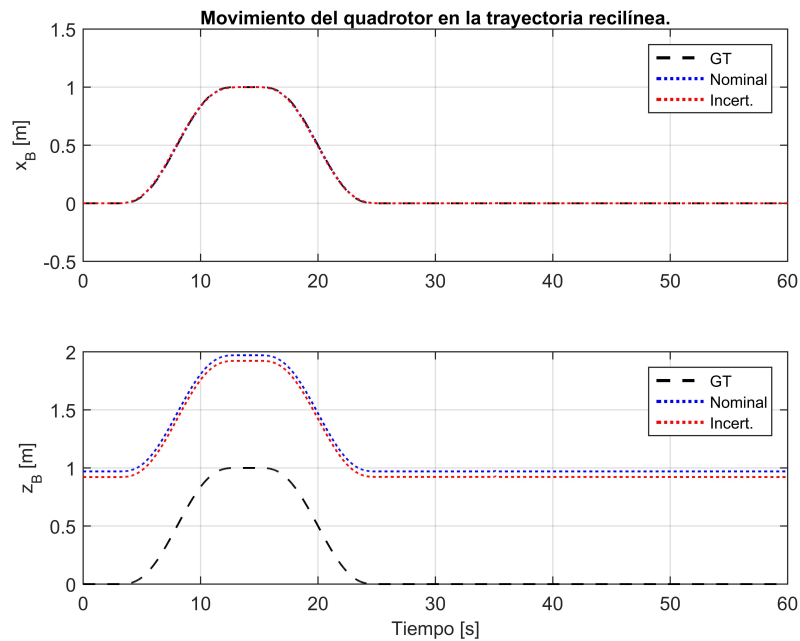


Figura 5.36 Simulación de los controles LQR frente a la planta no lineal y ante la trayectoria rectilínea definida en Subsección 5.2.1. Movimiento del quadrotor.

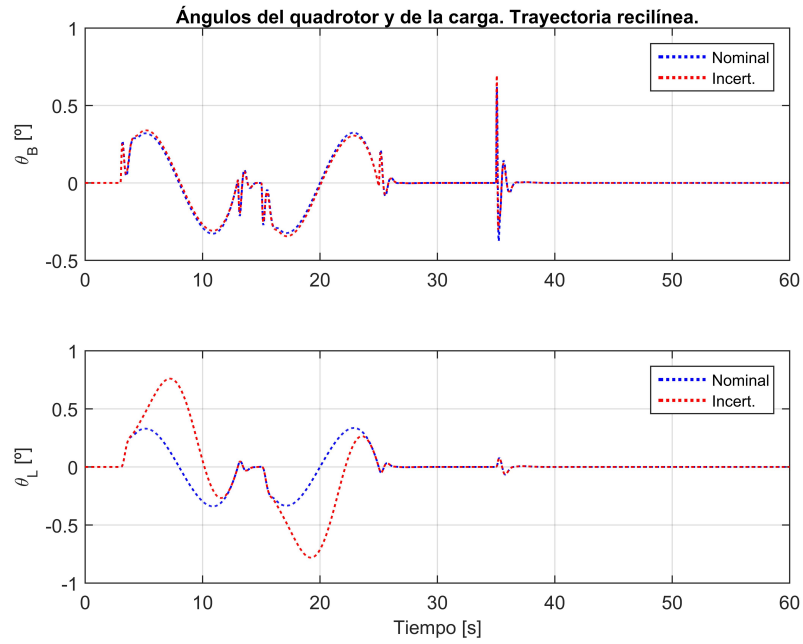


Figura 5.37 Simulación de los controles LQR frente a la planta no lineal y ante la trayectoria rectilínea definida en Subsección 5.2.1. Ángulos θ_B y θ_L .

Trayectoria Circular:

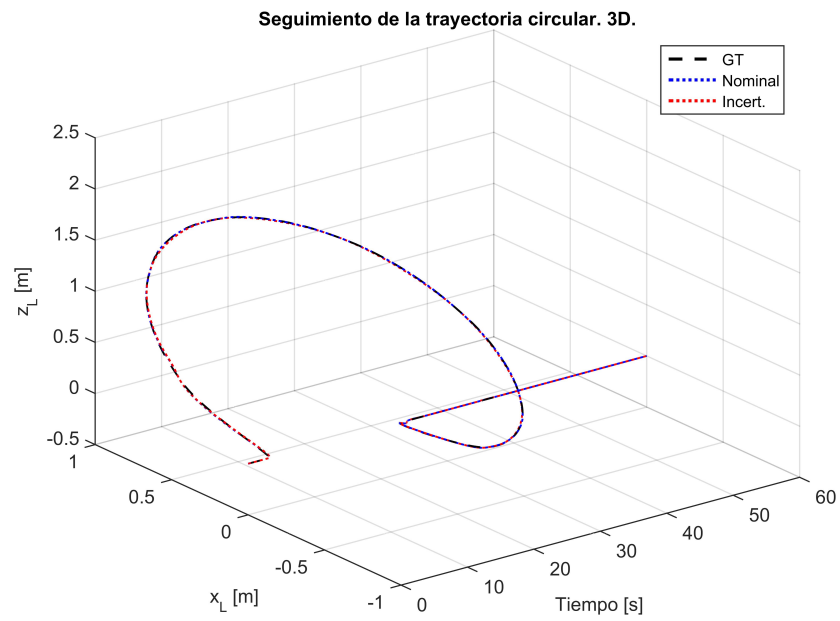


Figura 5.38 Simulación de los controles LQR frente a la planta no lineal y ante la trayectoria circular definida en Subsección 5.2.1. 3 dimensiones.

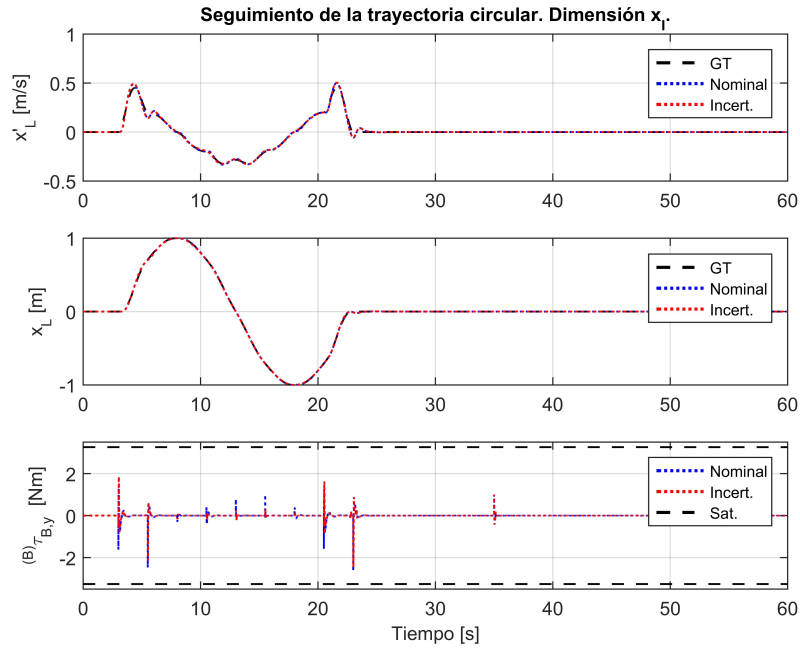


Figura 5.39 Simulación de los controles LQR frente a la planta no lineal y ante la trayectoria circular definida en Subsección 5.2.1. Dimensión x_L .

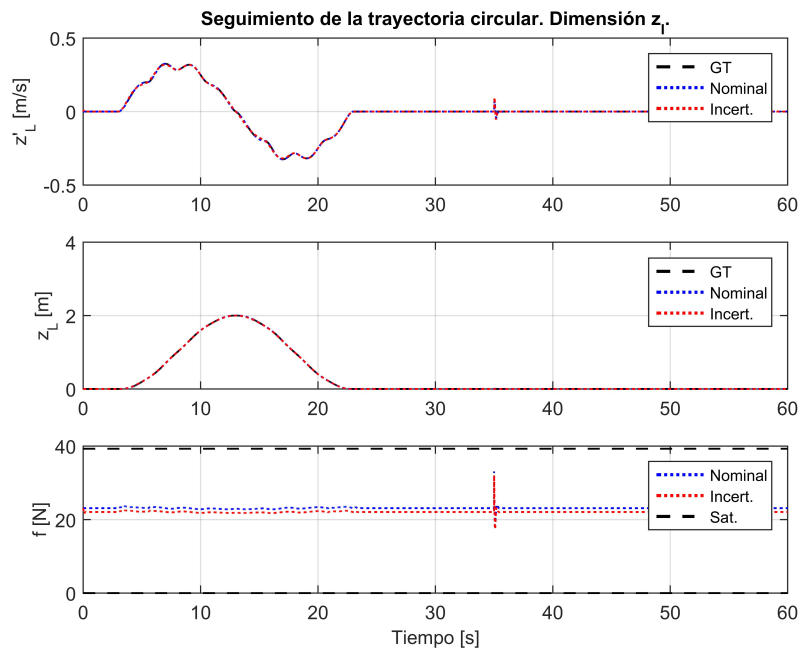


Figura 5.40 Simulación de los controles LQR frente a la planta no lineal y ante la trayectoria circular definida en Subsección 5.2.1. Dimensión z_L .

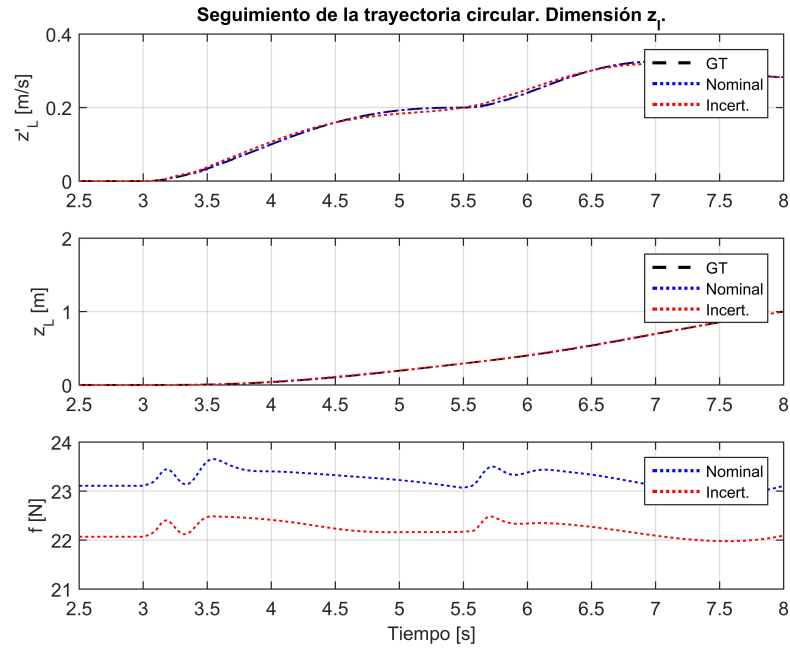


Figura 5.41 Simulación de los controles LQR frente a la planta no lineal y ante la trayectoria circular definida en Subsección 5.2.1. Dimensión z_L con zoom.

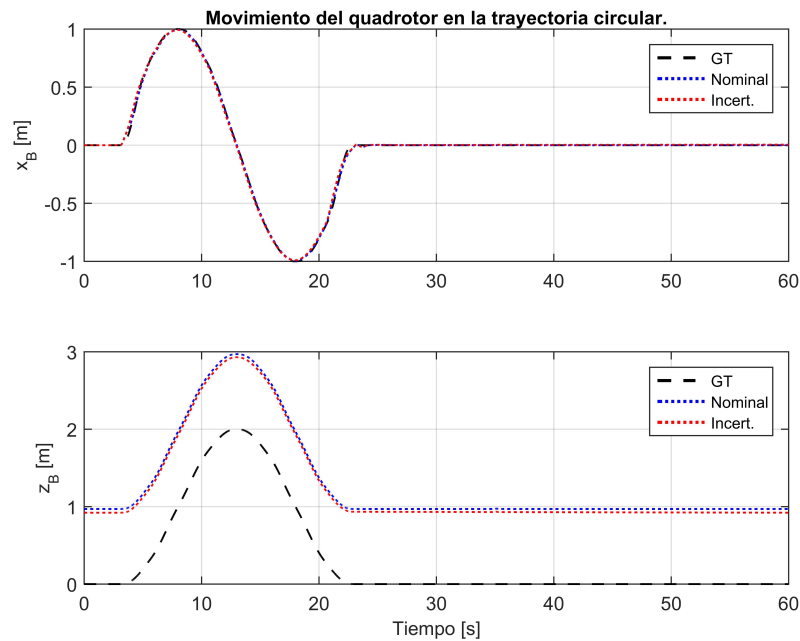


Figura 5.42 Simulación de los controles LQR frente a la planta no lineal y ante la trayectoria circular definida en Subsección 5.2.1. Movimiento del quadrotor.

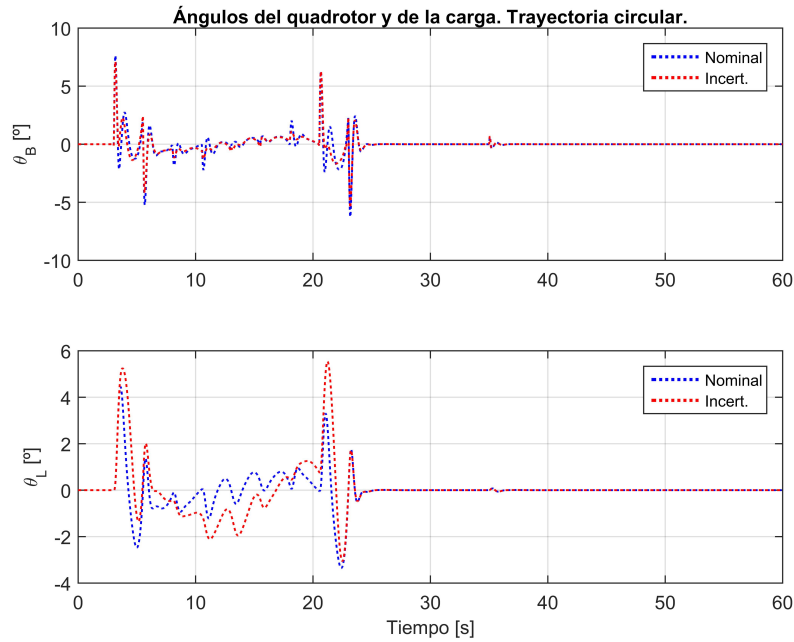


Figura 5.43 Simulación de los controles LQR frente a la planta no lineal y ante la trayectoria circular definida en Subsección 5.2.1. Ángulos θ_B y θ_L .

Índice de bondad ISE:

Tabla 5.4 Índices de bondad para las simulaciones de los controles LQR de posición y altitud.

ISE	T. rectilínea		T. circular	
	x_c [m ²]	z_c [m ²]	x_c [m ²]	z_c [m ²]
Nominal	$6.535 \cdot 10^{-6}$	$3.028 \cdot 10^{-6}$	$1.118 \cdot 10^{-3}$	$3.04 \cdot 10^{-6}$
Incertidumbre	$6.463 \cdot 10^{-6}$	$3.306 \cdot 10^{-6}$	$1.267 \cdot 10^{-3}$	$3.314 \cdot 10^{-6}$

Se han encontrado menores errores de seguimiento en el control de altitud que en el control de posición horizontal para ambas trayectorias. Al igual que sucedió para el control PID, esto se debe principalmente a que la dinámica del subsistema de altitud es mayor. Por otro lado, se han resimulado los test sin las perturbaciones, y se han comparado los errores con los aquí mostrados incluyendo las perturbaciones. Se concluye que el efecto integral es similar para ambos controles.

En comparación con los controles PID, se han obtenido menores errores a pesar de que el sistema con los controles LQR posee una dinámica más lenta para el subsistema de posición horizontal. Una de las razones puede ser el mejor diseño del control de altitud, ya que se ha comprobado por tests que éste influye considerablemente en el rendimiento del conjunto del sistema. Por otro lado, también se ha verificado que el efecto integral del control LQGt-I para el subsistema de posición horizontal es más agresivo que el diseñado en el control PID.

Los ángulos que adquiere la carga y el quadrotor son parecidos para los controles PID y LQR en la trayectoria rectilínea (trayectoria sin mucha complejidad), mientras que en la trayectoria circular (de mayor complejidad) los controles LQR requieren ligeramente menores ángulos del quadrotor, pero ligeramente mayores ángulos de la carga. Por otro lado, la trayectoria que describe el quadrotor no presenta oscilaciones.

En cuanto a las saturaciones, al contrario de lo que ocurrió en los controles PID, en ninguno de los casos estas han sido alcanzadas. La razón radica principalmente en que en los controles LQR se tuvieron en cuenta los esfuerzos de control en las funciones de optimización usadas para el cálculo de los controles, así como por la dinámica más lenta del subsistema de posición horizontal.

Los comportamientos nominales y con incertidumbres son muy similares, encontrándose de nuevo las mayores diferencias en el ángulo de la carga θ_c . En consideración a estos resultados, se puede concluir estabilidad y comportamientos robustos.

En definitiva, los resultados hallados con el control óptimo para las simulaciones mostradas son mejores que los obtenidos con el control PID a pesar de que la dinámica del subsistema de posición horizontal sea más lenta en el control LQGt-I.

6 Control robusto \mathcal{H}_∞ : lineal y no lineal

En esta sección se explicarán y diseñarán los controles \mathcal{H}_∞ lineal y no lineal respectivamente. En ambos casos se usará la planta no lineal para las simulaciones así como las trayectorias y simulaciones descritas en el capítulo anterior, Sección 5.1 y Sección 5.2 respectivamente. Además, para el caso del control \mathcal{H}_∞ lineal se mantendrá igualmente la planta a tener en cuenta para el diseño de los controles lineales, (5.2).

6.1 Control robusto \mathcal{H}_∞ lineal para el lazo externo de la posición horizontal y la altitud de la carga

En el desarrollo de esta sección se supondrán conocidos ciertos detalles básicos acerca del control robusto, tales como el tipo de incertidumbres existentes y sus posibles representaciones, funciones de lazo, de sensibilidad y de sensibilidad complementaria, así como conocimientos básicos acerca del control \mathcal{H}_∞ lineal S/KS/T y GS/T. Aún así se aportarán algunos detalles teóricos sobre estos últimos. Se recomienda revisar encarecidamente las fuentes bibliográficas [18], [47], [37], [11] para más detalles al respecto.

La idea de partida era la de aplicar un control \mathcal{H}_∞ lineal de Sensibilidad Mixta S/KS/T para ambos subsistemas de posición horizontal y altitud de la carga. Sin embargo, este tipo de control tiende a invertir la planta, y, como ya se vio en la Figura 4.1, el subsistema de posición horizontal presenta un pico de resonancia sobre los 3.26 rad/s. Esto provoca que el control S/KS/T sea extremadamente sensible a las incertidumbres. En cambio, en el esquema \mathcal{H}_∞ lineal GS/T el controlador no incluye una inversión de la planta, obteniendo mejores resultados ante plantas mal condicionadas. De esta manera, el subsistema de posición horizontal será controlado por un esquema de control \mathcal{H}_∞ lineal GS/T, y el de altitud por un esquema de control \mathcal{H}_∞ lineal S/KS/T.

En cuanto a las estrategias de control, se mantendrá la estructura usada para el control óptimo del capítulo anterior. Se tendrá, por tanto, un único control \mathcal{H}_∞ lineal S/KS/T para el subsistema de altitud, mientras que para el control del subsistema de posición horizontal se usará un control en cascada, manteniendo el control PID diseñado en Sección 5.4 para la actitud del quadrotor, y diseñando el control \mathcal{H}_∞ lineal GS/T para el lazo externo. El motivo radica en la dificultad que se encontró para conseguir un buen comportamiento de rechazo de perturbaciones cuando se pretendió usar un único control LQR para el subsistema de posición horizontal, Sección 5.6.

En la siguiente sección se hablará de ambos esquemas S/KS/T y GS/T. No obstante, existen ciertos pasos de importancia a realizar previamente al diseño de ambos controles \mathcal{H}_∞ :

- Escalado. Este requisito adquiere mayor relevancia para sistemas MIMO que para sistemas SISO. Se trata de asegurar que todas las señales sean de la misma importancia con respecto a sus magnitudes, [47], [36]. Para el escalado se usarán las siguientes relaciones, refiriéndose " u " a las señales de control, " y " a las salidas de las plantas, " $\hat{\gamma}$ " a la variable real, y " γ " a la variable escalada:

$$u = \frac{\hat{u}}{\hat{u}_{max}}; \quad y = \frac{\hat{y}}{\hat{e}_{max}}; \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z_{\mathcal{L}}(s) = \frac{\hat{f}_{max}}{\hat{e}_{max}} \hat{z}_{\mathcal{L}}(s) \\ x_{\mathcal{L}}(s) = \frac{\hat{\theta}_{B_{max}}}{\hat{e}_{max}} \hat{x}_{\mathcal{L}}(s) \end{cases}$$

- Truncamiento de los integradores. Los integradores se trasladarán a polos muy cercanos al origen para evitar problemas numéricos en el cálculo de los controladores, [47], [11], [36].
- Las incertidumbres se considerarán no estructuradas (acoplamiento total entre las distintas fuentes de incertidumbres). Se representarán como incertidumbres multiplicativas a la salida, [36], cuya expresión sería:

$$\hat{E}_{o,i}(s) = \frac{(G_i^*(s) - G^N(s))}{G^N(s)}, \quad i = 1, 2, \dots$$

donde $G_i^*(s)$ denota cada una de las funciones de transferencia que componen la familia de plantas, y $G^N(s)$ el modelo nominal.

6.1.1 Nociones sobre los problemas \mathcal{H}_∞ lineal S/KS/T y GS/T: inversión y no inversión de la planta

A continuación se realizará una breve introducción a ambos problemas S/KS/T y GS/T, y se demostrará de manera sencilla la inversión y no inversión de la planta en ambos casos respectivamente. Sin embargo, antes de comenzar conviene definir las siguientes funciones de lazo, utilizando para ello la Figura 6.1, [11]:

- $L_e(s)$ y $L_u(s)$: $L_e(s)$ es la fdt en bucle abierto que va desde " r " hasta " y ", mientras que $L_u(s)$ es la fdt en bucle abierto que va desde " v " hasta " ub "

$$L_e = G K; \quad L_u = K G$$

- $S_e(s)$ y $S_u(s)$: funciones de sensibilidad a la salida y a la entrada de la planta respectivamente. $S_e(s)$ es la fdt en bucle cerrado que va desde " d " hasta " y ", mientras que $S_u(s)$ es la fdt en bucle cerrado que va desde " v " hasta " u ".

$$S_e = (\mathbb{I} + L_e)^{-1}; \quad L_u = (\mathbb{I} + L_u)^{-1}$$

- $T_e(s)$ y $T_u(s)$: funciones de sensibilidad complementaria a la salida y a la entrada de la planta

respectivamente. $T_e(s)$ es la fdt en bucle cerrado que va desde "r" hasta "y", mientras que $T_u(s)$ es la fdt en bucle cerrado que va desde "v" hasta "ub", cambiada de signo.

$$T_e = S_e L_e; \quad T_u = S_u L_u$$

- $K(s) S_e(s)$ y $K(s) S_u(s)$: funciones de sensibilidad del control a la salida y a la entrada de la planta respectivamente.

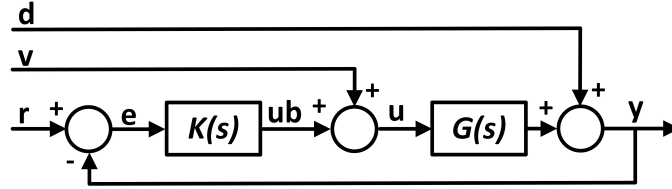


Figura 6.1 Sistema estándar en bucle cerrado.

El problema \mathcal{H}_∞ lineal S/KS/T estándar trata de dar forma a las sensibilidades a la salida de la planta con funciones de ponderación situadas a la salida de la planta. Más concretamente, consistirá en calcular un control $K(s)$ tal que, [47], [36]:

$$\|T_{z\omega}(s)\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} W_e(s) S_e(s) \\ W_u(s) K(s) S_e(s) \\ W_y(s) T_e(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty = \gamma; \quad \gamma < 1$$

donde $W_e(s)$, $W_u(s)$ y $W_y(s)$ son las funciones de ponderación encargadas de acotar y delimitar el comportamiento del sistema en bucle cerrado. Dicho de otro modo, el objetivo es "calcular un controlador $K(s)$ que atenúe la relación entre la energía del vector objetivo, z , y la del vector de perturbaciones, ω , siendo γ la atenuación conseguida", [36].

$W_y(s)$ impone una cota superior con respecto a las incertidumbres para garantizar la estabilidad robusta. Deberá elegirse de tal forma que su módulo esté por encima del mayor valor singular de los modelos de las incertidumbres multiplicativas a la salida de la planta para todas las frecuencias: $|W_y(j\omega)| \geq \sigma_{\max}(\hat{E}_{o,i}(j\omega)) \quad \forall \omega$. Además de para garantizar la estabilidad robusta, la ponderación de $T_e(s)$ es igualmente importante para problemas de seguimiento y para la atenuación de ruidos. Para tal fin, $W_y(s)$ también deberá elegirse tal que tenga una ganancia alta a altas frecuencias, [37]. La función de ponderación $W_e(s)$ delimitará el comportamiento o especificaciones del sistema, estableciendo el ancho de banda mínimo deseable. La ponderación $W_e(s)$ deberá ser de ganancia alta a frecuencias por debajo de la frecuencia de corte para conseguir un buen rechazo de perturbaciones y buenas propiedades de seguimiento de trayectorias, [36], [11]. Por último, $W_u(s)$ pondera la función de sensibilidad del control. La principal razón de uso de esta última ponderación es para evitar problemas numéricos en algoritmos de síntesis, [37] (asunción A3 de [11]). Todas estas funciones de ponderación han de ser asintóticamente estables, [11], [36].

El conjunto de funciones de ponderación, junto con la planta y regulador, pueden transcribirse en un diagrama de bloques equivalente según la formulación general del problema de control de

Doyle, [47], [36]:

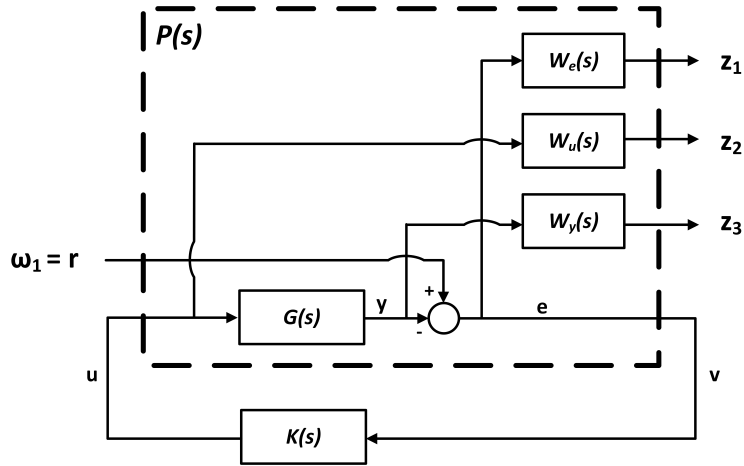


Figura 6.2 Estructura del problema \mathcal{H}_∞ lineal S/KS/T estándar.

Para explicar la razón de la inversión de la planta en el control proporcionado en este problema se usará la fuente [11]. Se considerará que $W_e(j\omega) S_e(j\omega) \approx A(j\omega)$ (siendo $A(j\omega)$ un filtro paso-todo asintóticamente estable) se cumple a bajas frecuencias, en donde la función $W_e(j\omega)$ actúa como peso limitante. A estas frecuencias, la ganancia del lazo ($L_e(j\omega) = G(j\omega) K(j\omega) \gg \mathbb{I}$), por lo que $S_e(j\omega)$ puede ser aproximada según sigue:

$$S_e(j\omega) = (\mathbb{I} + L_e(j\omega))^{-1} \approx L_e^{-1}(j\omega)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} W_e(j\omega) S_e(j\omega) &\approx W_e(j\omega) L_e^{-1}(j\omega) = W_e(j\omega) K^{-1}(j\omega) G^{-1}(j\omega) \approx A(j\omega) \\ &\Downarrow \\ K(j\omega) &\approx G^{-1}(j\omega) A^{-1}(j\omega) W_e(j\omega) \end{aligned}$$

Queda así demostrado que $K(j\omega)$ invierte la planta en el problema \mathcal{H}_∞ lineal S/KS/T.

Habiendo comprobado (teórica y experimentalmente mediante algunas pruebas) que el problema \mathcal{H}_∞ lineal S/KS/T invierte la planta, y dado el pico de resonancia del subsistema de posición horizontal sobre los 3.26 rad/s, antes de optar por el esquema \mathcal{H}_∞ lineal GS/T para el subsistema de posición horizontal, se dedicó bastante esfuerzo en otro tipo de procedimientos combinados con el algoritmo \mathcal{H}_∞ lineal S/KS/T, tratando de mitigar el efecto de la resonancia. A continuación, se enumeran, si bien cabe indicar que todos ellos resultaron fallidos:

- Filtro Notch. Se aplicó un filtro Notch para tratar de mitigar el efecto de la resonancia en x_z , [23], [31], [46].
- Mu-Synthesis. Principalmente, se intentó abordar el problema \mathcal{H}_∞ lineal S/KS/T con una aproximación LFTs (Linear Fraction Transformations) para la representación de las incertidumbres, basado especialmente en el ejemplo del problema del muelle de [4], [18]. También

se intentó a través del procedimiento "D-K Iteration", [4], en lugar de \mathcal{H}_∞ lineal S/KS/T.

- \mathcal{H}_∞ lineal S/KS/T. Se usaron distintas configuraciones de la planta aumentada, como añadir una señal de perturbación a la misma, [47], [11], tratando de aumentar la robustez ante perturbaciones e incertidumbres.
- Como se verá posteriormente, el esquema \mathcal{H}_∞ lineal GS/T evita la inversión de la planta en el controlador al incluirla multiplicando a la función de ponderación de la sensibilidad en $T_{zw}(s)$. Sabiendo esto, también se trató incluir la planta en la función de ponderación de la sensibilidad para el algoritmo \mathcal{H}_∞ lineal S/KS/T. El intento resultó nuevamente fallido, pues las funciones de ponderación deben ser asintóticamente estables para que $T_{zw}(s)$ sea estabilizable por el controlador (asunción A1 de [11]). Además, el orden de la planta aumentada se vería incrementado.

Se procede ahora con la breve introducción al problema \mathcal{H}_∞ lineal GS/T. Todo lo relativo al mismo está basado principalmente en la tesis doctoral de Urs, [11], en [47], [36], y adicionalmente en los trabajos de [13], [12], [51].

El esquema del problema \mathcal{H}_∞ lineal GS/T estándar se muestra en la Figura 6.3. De manera diferente al esquema S/KS/T anterior, se tratará de dar la forma deseada a las sensibilidades a la entrada de la planta usando funciones de ponderación situadas a la salida de la planta. No obstante, la función de sensibilidad se pondera sobre "y", Figura 6.3, en lugar de sobre "u", para incluir la planta $G(s)$ en la ponderación de la función de sensibilidad a la entrada, razón por la que en $T_{z\omega}(s)$ aparecerá la sensibilidad complementaria a la salida de la planta, $T_e(s)$ (para una mejor comprensión se recomienda formar manualmente la matriz $T_{z\omega}(s)$). Por otro lado, al igual que para el problema S/KS/T, se tratará de calcular un control $K(s)$ tal que la norma ∞ de la función de transferencia en bucle cerrado de ω a z , $T_{z\omega}(s)$, sea inferior a la unidad:

$$\|T_{z\omega}(s)\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} -W_{ub}(s) T_u(s) & W_{ub}(s) S_u(s) W_d(s) \\ W_y(s) G(s) S_u(s) & W_y(s) T_e(s) W_d(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty = \gamma; \quad \gamma < 1$$

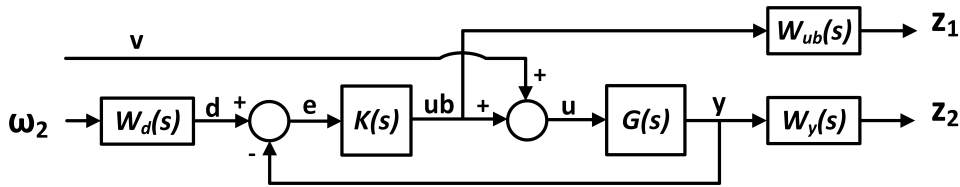


Figura 6.3 Esquema del algoritmo \mathcal{H}_∞ lineal GS/T estándar.

La señal de entrada ω_2 existe únicamente para cumplir los requisitos necesarios para la resolución de la función de coste asociada al problema \mathcal{H}_∞ (asunción A4, pág. 44 de [11]). Por tanto, la función de ponderación $W_d(s)$ debe ser estática y pequeña para que no afecte a la norma de $T_{z\omega}(s)$. De

esta manera, la primera columna de $T_{z\omega}(s)$ sería la de relevancia.

En este caso, $W_y(s)$ delimitará el comportamiento o especificaciones del sistema, estableciendo el ancho de banda mínimo, y $W_{ub}(s)$ impondrá una cota superior con respecto a las incertidumbres para la estabilidad robusta.

De manera similar al problema S/KS/T, y omitiendo la notación con las dependencias de $(j\omega)$, W_y adquiere mayor importancia a bajas frecuencias:

$$\begin{aligned} W_y G S_u &\approx W_y G L_u^{-1} = W_y G G^{-1} K^{-1} = W_y K^{-1} \approx A \\ &\Downarrow \\ K &\approx A^{-1} W_y \end{aligned}$$

Se comprueba, por tanto, que, con el desarrollo GS/T, el control $K(s)$ no invierte la planta. Desarrollos algo más detallados pueden encontrarse en [11] para ambos problemas.

Según [11], una desventaja del problema GS/T estándar con respecto al S/KS/T es que suele ser peor en el seguimiento de referencias. En el problema S/KS/T, la planta generalizada tiene como entradas r y u , y como salidas z_1 , z_2 , z_3 y ν . Las salidas z_1 y z_3 están relacionadas con la ponderación a la sensibilidad y la sensibilidad complementaria respectivamente. Con alguna operación sencilla de por medio, se puede comprobar que ambas señales están desacopladas. Por contra, en el problema GS/T esto no ocurre. En este caso las entradas de la planta generalizada serían ν , ω_2 y ub , y las salidas z_1 , z_2 y e . Las salidas z_1 y z_2 están relacionadas en este caso con la ponderación a la sensibilidad complementaria y a la sensibilidad respectivamente, estando ambas señales acopladas. Esta es la razón por la que el problema GS/T estándar suele tener peores propiedades en el seguimiento de referencias. Sin embargo, tal y como se especifica en [11], la solución radica en un esquema extendido, de 2 grados de libertad, en donde el controlador procesa la referencia de manera independiente a la salida medida, mejorando así las propiedades del seguimiento de referencias.

El esquema extendido de 2 grados de libertad está basado en una propiedad citada en [11], según la cual, las propiedades de la sensibilidad y de la fdt desde la referencia hasta la señal de salida son independientes entre ellas si se usa un control feedforward para la señal de referencia. Así pues, en el esquema extendido, por ejemplo Figura 6.4, el controlador consta de dos controles, uno feedforward para procesar la referencia $K_f(s)$, y otro feedback para procesar la salida $K_b(s)$. De esta manera, las propiedades del bucle cerrado son optimizadas con $K_b(s)$, mientras que las propiedades de seguimiento son mejoradas con $K_f(s)$. Se podría decir que la rama feedback trata de un problema de regulación, mientras que la feedforward aborda el problema de seguimiento.

Existen dos procedimientos para el diseño del esquema de 2 grados de libertad: en 2 pasos y en 1 paso. El de 2 pasos tiene la ventaja de que se pueden diseñar de manera totalmente independiente los controles feedforward y feedback. Sin embargo, el controlador resultante tendrá un mayor número de estados, siendo más complejo. En este proyecto se ha optado por el diseño en 1 paso, Figura 6.4, puesto que se obtienen controles más sencillos.

En el esquema de 2 grados de libertad en 1 paso, la sensibilidad a la salida de la planta, multiplicada por la fdt de la planta, $S_e(s) G(s)$, y la sensibilidad complementaria a la salida de la planta, $T_e(s)$, se acotan con funciones de ponderación situadas a la entrada de la planta. A continuación se mostrarán las expresiones de las sensibilidades para una mejor comprensión del problema, omitiendo la

notación con las dependencias de (s) de aquí en adelante:

$$\begin{aligned} S_e &= (\mathbb{I} + G K_b)^{-1}; & S_u &= (\mathbb{I} + K_b G)^{-1}; & S_{yr} &= \mathbb{I} - T_{yr} \\ T_e &= S_e G K_b; & T_u &= S_u K_b G; & T_{yr} &= S_e G K_f \end{aligned}$$

donde T_{yr} es la sensibilidad complementaria de la fdt del seguimiento.

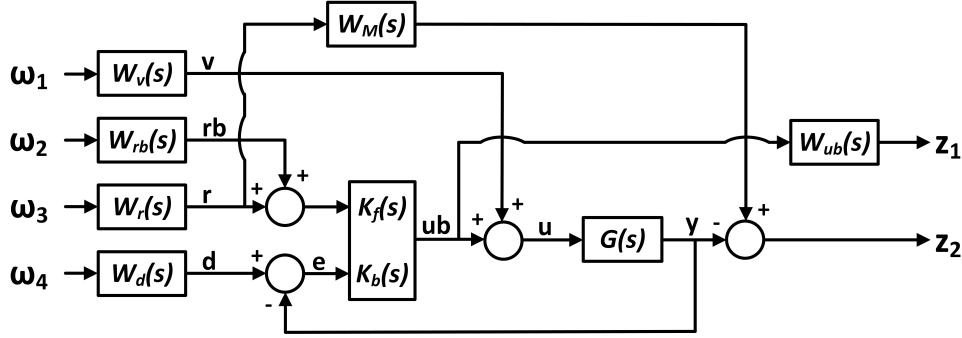


Figura 6.4 Esquema del algoritmo \mathcal{H}_∞ lineal GS/T de dos grados de libertad y diseño en 1 paso.

El problema consistiría nuevamente en buscar un controlador $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_f & K_b \end{bmatrix}$ tal que $\|\mathbf{T}_{z\omega}\|_\infty < 1$. La fdt $\mathbf{T}_{z\omega}$ vendría dada por:

$$\mathbf{T}_{z\omega} = \begin{bmatrix} -W_{ub} T_u W_\nu & W_{ub} S_u K_f W_{rb} & W_{ub} S_u K_f W_r & W_{ub} K_b S_e W_d \\ -S_e G W_\nu & -T_{yr} W_{rb} & (W_M - T_{yr}) W_r & -T_e W_d \end{bmatrix}$$

En cuanto a las funciones de ponderación, W_{ub} debe ser lo suficientemente pequeña como para no influir en $\mathbf{T}_{z\omega}$, ya que esta función se añade únicamente para poder resolver el problema. W_ν y W_d definen la sensibilidad y la sensibilidad complementaria respectivamente. W_{rb} y W_r ponderan la sensibilidad y sensibilidad complementaria de la fdt del seguimiento, ya que W_M suele ser escogida como la identidad, y $S_{yr} = \mathbb{I} - T_{yr}$. De esta manera, W_ν y W_r asignan el mínimo ancho de banda de la parte feedback y feedforward respectivamente, y W_d y W_{rb} acotan el máximo ancho de banda de las partes feedback y feedforward respectivamente.

Así pues, para el control del lazo externo de la posición horizontal de la carga se usará un esquema \mathcal{H}_∞ lineal GS/T de 2 grados de libertad y diseño en un solo paso. Por otra parte, la altitud de la carga será controlada por un esquema \mathcal{H}_∞ lineal S/KS/T estándar. En ambos casos, una vez diseñadas las funciones de ponderación se formarán las correspondientes plantas aumentadas y se usará la función de Matlab "hinfsyn" para el cálculo de la norma $\|\mathbf{T}_{z\omega}(s)\|_\infty$ y de los controladores.

6.1.2 Lazo externo del control de posición horizontal de la carga: GS/T de 2 grados de libertad en 1 paso

Como se ha apuntado anteriormente, el control \mathcal{H}_∞ lineal GS/T, de 2 DOF y diseño en 1 paso, se aplicará sobre el lazo externo del subsistema de posición horizontal de la carga. La planta a considerar será por tanto $^{pos}G_{ba3}(s) = x_c(s)/\theta_b^r(s)$ de (5.7), volviéndose a mostrar a continuación:

$${}^{\text{pos}}G_{ba_3}(s) = \frac{x_{\mathcal{L}}(s)}{\theta_B^r(s)} = \frac{g}{\left(\frac{({}^{\text{B}})T_B^{yy}}{K_1 K_2} s^2 + \frac{1}{K_2} s + 1 \right) \cdot s^2 \left(s^2 \frac{l m_B}{g m} + 1 \right)}$$

Se recuerda que se asumirán conocidas las expresiones correspondientes a las funciones de lazo, de sensibilidad, de sensibilidad complementaria, y de sensibilidad al control.

En la delimitación de las sensibilidades complementarias, T_e y T_{yr} , se ha decidido usar las mismas ponderaciones para W_{rb} y W_d , (6.1), Figura 6.5. Esta delimitación deberá ser cota superior de las incertidumbres multiplicativas a la salida, $\widehat{E}_{o,i}(s)$, como se especificó anteriormente. Aunque no ha sido posible acotar los picos de resonancia, sí que se asegurará que los anchos de banda máximos no superen a los fijados por la funciones de ponderación, limitados a frecuencias ligeramente inferiores a la línea que describirían las incertidumbres multiplicativas a la salida de la planta sin las resonancias. No obstante, el pico de resonancia (nominal) sí que aparecerá en la ponderación de la función de sensibilidad de la parte feedback para evitar un controlador con inversión de la planta. Finalmente, los anchos de banda máximos quedan limitados a $\omega \approx 10$ rad/s.

$$W_{rb} = W_d = \frac{10^{-30/20} (2.2 s + 1)}{0.01 s + 1} \quad (6.1)$$

También se tratará de fijar un mismo ancho de banda mínimo para S_e y S_{yr} , Figura 6.5. Los anchos de banda mínimos quedan limitados a $\omega \approx 4$ rad/s. Además, se ha tratado de incluir efecto integral en las sensibilidades a través de las pendientes de las ponderaciones, [36], [11]. A continuación se muestran sus expresiones:

$$W_v = \frac{s + 10^{0.2}}{s + 1.6 \cdot 10^{-2}}$$

$$W_r = \left(\frac{0.5^{1/3} s + 10^{0.5}}{s + 2.1 \cdot 10^{-3}} \right)^3$$

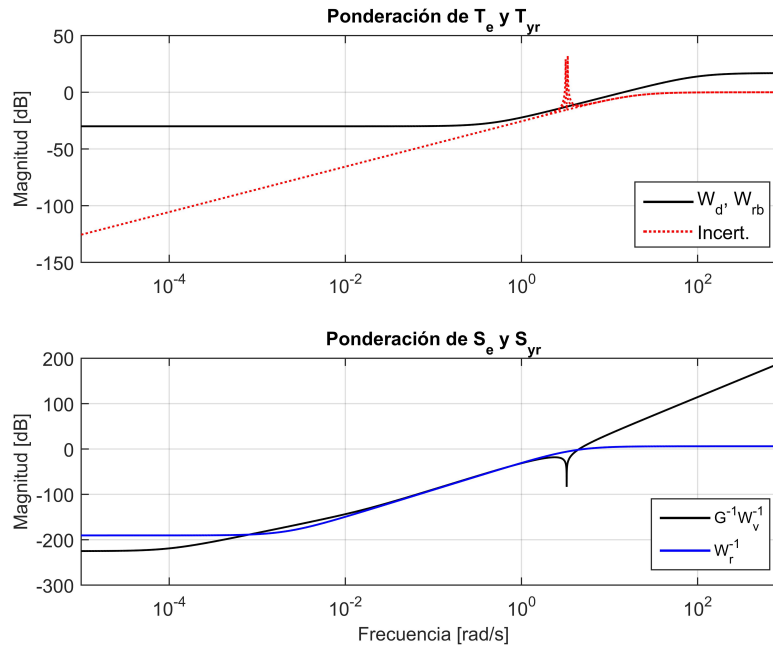


Figura 6.5 Funciones de ponderación de las sensibilidades y sensibilidades complementarias del subsistema de posición de la carga. Problema \mathcal{H}_∞ lineal GS/T.

Definidas las funciones de ponderación, se ha formado la planta generalizada, y se ha usado la función "hinfsyn()" de Matlab. Los controles encontrados por esta función dan lugar a una norma infinito de $\|T_{z\omega}\|_\infty = 1.533$. Esto quiere decir que el controlador sobrepasa en algún lugar las delimitaciones impuestas por las funciones de ponderación.

En la Figura 6.6 se pueden comprobar las sensibilidades y sus ponderaciones, tanto de la planta nominal como de las plantas más extremas. S_{yr} sobrepasa su ponderación un máximo de 14 dB, T_e un máximo de 19 dB, y T_{yr} un máximo de 14.5 dB. En los 3 casos se produce en el intervalo de $[6.5, 7]$ rad/s. Debido a que estos valores no son extremadamente altos, a que la norma queda relativamente cerca de la unidad, y a la complejidad del problema a la hora de encontrar resultados válidos, se tomará esta solución. Sin embargo, en base a estos resultados se estima que el comportamiento del sistema ante referencias en escalón sea un tanto oscilatorio.

Las expresiones de los controles feedforward y feedback ya desescaladas se muestran, por ese orden, en (6.2). Estas expresiones son bastante complejas, de orden 10. No obstante, en la Figura 6.7 se han dibujado sus valores singulares para facilitar su comprensión. Como se puede notar, no hay evidencias de inversión de la planta.

$$K_f = \frac{1.65 \cdot 10^7 s^9 + 1.96 \cdot 10^9 s^8 + 3.44 \cdot 10^{10} s^7 + 3.29 \cdot 10^{11} s^6 + 2.08 \cdot 10^{12} s^5 + 9.12 \cdot 10^{12} s^4 + 2.72 \cdot 10^{13} s^3 + 5.13 \cdot 10^{13} s^2 + 5.52 \cdot 10^{13} s + 2.58 \cdot 10^{13}}{s^{10} + 5833 s^9 + 7.35 \cdot 10^5 s^8 + 4.65 \cdot 10^7 s^7 + 1.85 \cdot 10^9 s^6 + 4.56 \cdot 10^{10} s^5 + 5.17 \cdot 10^{11} s^4 + 3.03 \cdot 10^{12} s^3 + 8.64 \cdot 10^{12} s^2 + 9.52 \cdot 10^{12} s} \quad (6.2)$$

$$K_b = \frac{1.57 \cdot 10^7 s^9 + 1.92 \cdot 10^9 s^8 + 3.82 \cdot 10^{10} s^7 + 3.8 \cdot 10^{11} s^6 + 2.3 \cdot 10^{12} s^5 + 9.43 \cdot 10^{12} s^4 + 2.72 \cdot 10^{13} s^3 + 5.13 \cdot 10^{13} s^2 + 5.52 \cdot 10^{13} s + 2.58 \cdot 10^{13}}{s^{10} + 5833 s^9 + 7.35 \cdot 10^5 s^8 + 4.65 \cdot 10^7 s^7 + 1.85 \cdot 10^9 s^6 + 4.56 \cdot 10^{10} s^5 + 5.17 \cdot 10^{11} s^4 + 3.03 \cdot 10^{12} s^3 + 8.64 \cdot 10^{12} s^2 + 9.52 \cdot 10^{12} s}$$

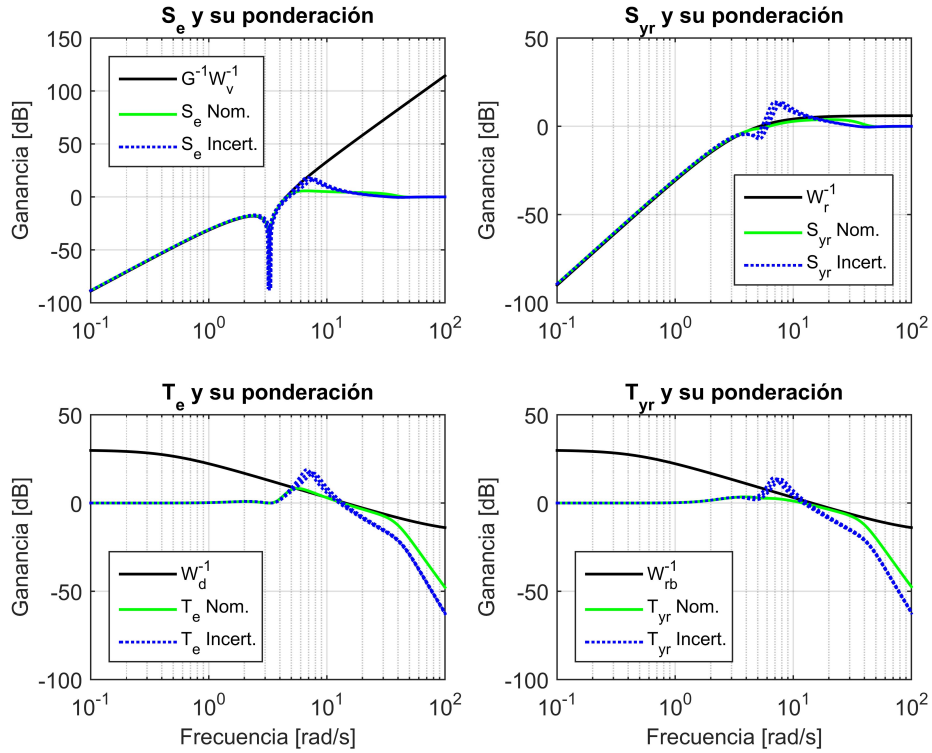


Figura 6.6 Sensibilidades y funciones de ponderación del subsistema de posición horizontal de la carga con el control diseñado. Problema \mathcal{H}_∞ lineal GS/T.

De nuevo, en la Figura 6.8 se muestran las simulaciones del control frente a 50 posibles plantas. En comparación con los anteriores controles PID y LQGt-I para el subsistema de posición horizontal de la carga, la respuesta es considerablemente más oscilatoria. A pesar de haber iterado con distintas matrices de ponderación, no se ha conseguido mejorar este comportamiento. La razón podría deberse a alguno de los siguientes motivos: aunque el algoritmo GS/T no invierta la planta sigue siendo en cierta medida débil para cierto tipo de plantas, a que se deba invertir una mayor cantidad de tiempo en la investigación de la creación y mejora de las matrices de ponderación, o a un conjunto de estas

dos razones. Debido a las limitaciones de tiempo no se ha profundizado en averiguar cuál podría ser la razón exacta. No obstante, como se comentó en los controles anteriores, las oscilaciones y sobre-oscilación se mitigarán con el generador de trayectorias.

Por otra parte, analizando con valores las características temporales de la respuesta, se cuenta con una sobre-oscilación del $SO = 84\%$, un tiempo de subida de $t_s = 0.19$ s, y un tiempo de establecimiento de $t_e = 1.8$ s. El tiempo de subida es menor que el conseguido con el control LQGt-I ($t_s = 0.68$ s) y mayor que el observado con el control PID ($t_s = 0.13$ s). Lo mismo ocurre con el tiempo de establecimiento, siendo de $t_e = 2.78$ s para el control LQGt-I, y de $t_e = 0.88$ s para el control PID. La sobreoscilación, por otra parte, es mucho mayor en comparación con los dos controles anteriores, siendo del $SO = 40\%$ para el control LQGt-I, y del $SO = 45\%$ para el control PID.

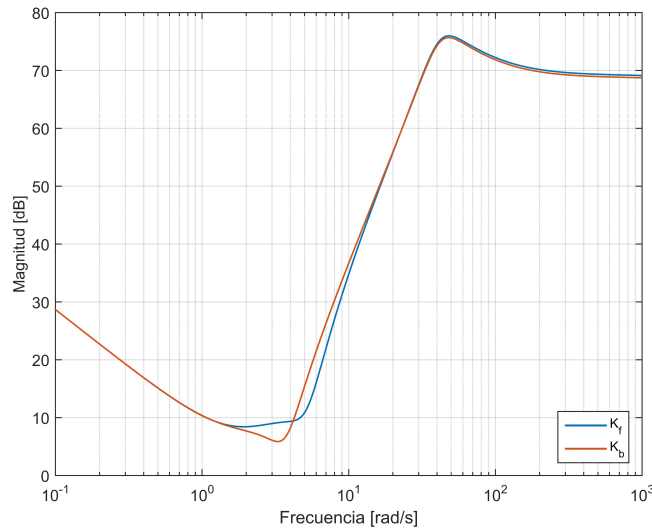


Figura 6.7 Valores singulares de los controles K_f y K_b hallados en el problema \mathcal{H}_∞ lineal GS/T.

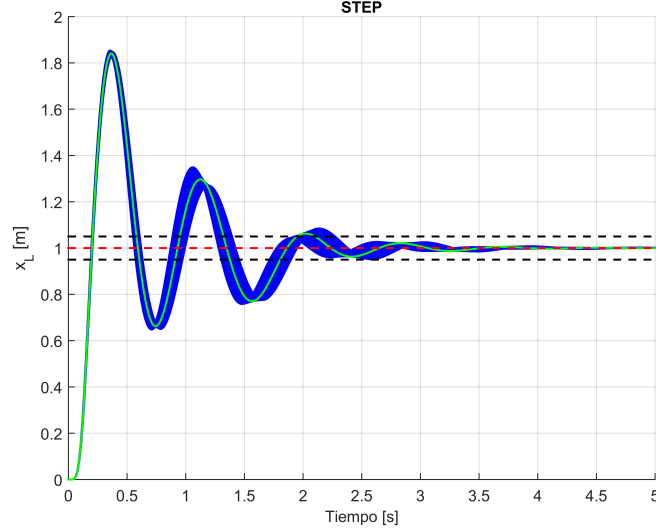


Figura 6.8 Respuesta del control \mathcal{H}_∞ lineal GS/T para la posición horizontal de la carga ante una familia de plantas lineales. Simulación realizada con el comando "step" de Matlab.

6.1.3 Control de altitud de la carga: S/KS/T

La transformada $z_L(s)$ correspondiente al lazo de altitud se mostró en (5.3), recordándose a continuación:

$$z_L(s) = \frac{f(s)}{m s^2}$$

Las funciones de ponderación diseñadas para este caso se muestran en la Figura 6.9. Se ha establecido un ancho de banda máximo de $\omega = 201 \text{ rad/s}$, y un ancho de banda mínimo de $\omega = 21 \text{ rad/s}$. La función de ponderación de la sensibilidad se ha diseñado para que S_e tenga efecto integral. Sus fdt quedan:

$$W_y = \frac{10^{-24/20} (0.056 s + 1)}{3.33 \cdot 10^{-4} s + 1}$$

$$W_e = \left(\frac{0.5^{1/3} s + 10^{1.32}}{s + 9.75 \cdot 10^{-4}} \right)^3$$

$$W_u = 1$$

El control hallado, (6.3), da lugar a una norma infinito de $\|T_{z\omega}\|_\infty = 6.29$. De nuevo, se sobrepasan las delimitaciones impuestas por las funciones de ponderación, Figura 6.10. Podría haberse conseguido una norma infinito $\|T_{z\omega}\|_\infty \approx 1$ si se hubiese relajado el ancho de banda mínimo impuesto. No obstante, se habría obtenido una respuesta del sistema más lenta, así como peores índices de bondad en las simulaciones posteriores. Por otro lado, la función de sensibilidad

hallada presenta una forma muy similar a la impuesta por la función de ponderación correspondiente, pero trasladada a frecuencias más bajas. Se podría afirmar, por tanto, que habiendo impuesto un ancho de banda mínimo alto se ha encontrado una solución más dinámica y válida en cuanto a la respuesta del sistema a pesar de sobrepasar los límites impuestos por la función de ponderación de la sensibilidad.

$$K = \frac{6.5 \cdot 10^6 s^2 + 7.98 \cdot 10^7 s + 4.24 \cdot 10^8}{0.1 s^3 + 2645 s^2 + 1.22 \cdot 10^5 s} \quad (6.3)$$

En la Figura 6.11 se ha simulado el control frente a 50 posibles plantas. Se ha encontrado una sobre-oscilación del $SO = 65 \%$, un tiempo de subida de $t_s = 0.06$ s, y un tiempo de establecimiento de $t_e = 0.42$ s. Únicamente el tiempo de subida se encuentra en torno a los valores conseguidos en los controles LQRt-I y PID, $t_s = 0.077$ s y $t_s = 0.05$ s respectivamente. El tiempo de establecimiento es cerca del doble de los dos controles del capítulo anterior (LQRt-I: $t_e = 0.23$ s, y PID: $t_e = 0.28$ s), y la sobre-oscilación superior también a los dos controles anteriores (LQRt-I: $SO = 33 \%$, y PID: $SO = 44 \%$).

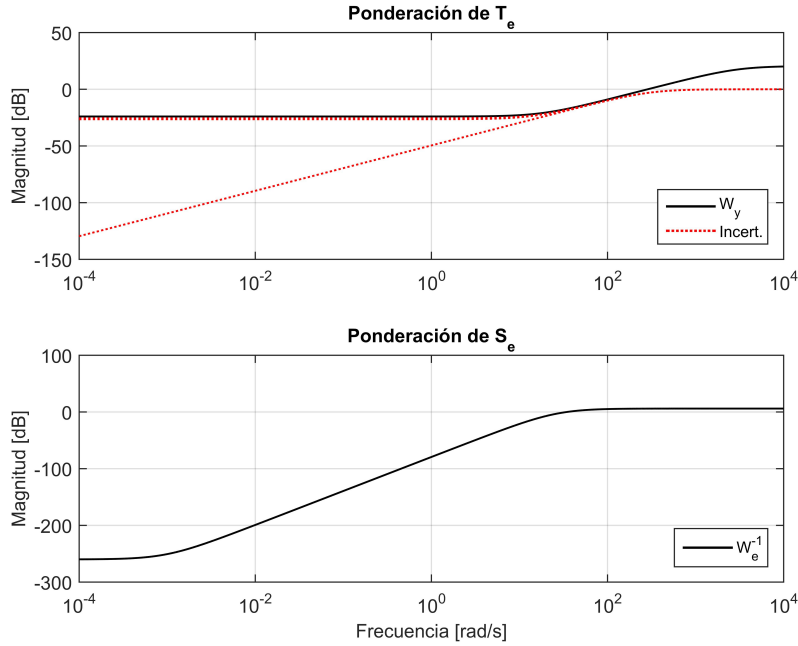


Figura 6.9 Funciones de ponderación de la sensibilidad, sensibilidad complementaria, y sensibilidad del control del subsistema de altitud de la carga. Problema \mathcal{H}_∞ lineal S/KS/T.

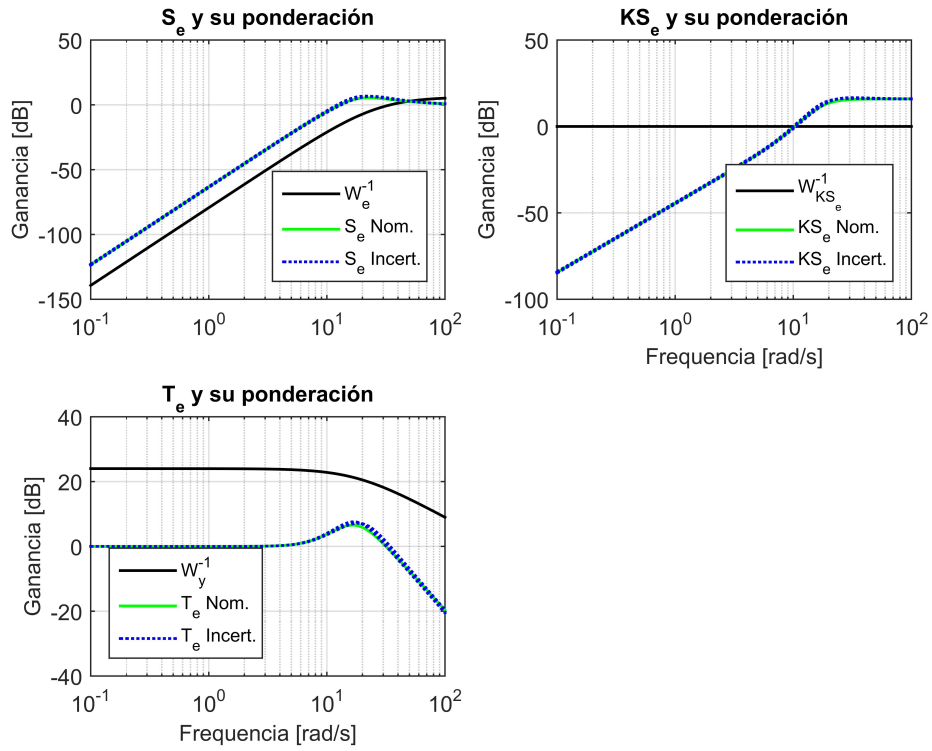


Figura 6.10 Sensibilidades y funciones de ponderación del subsistema de altitud de la carga. Problema \mathcal{H}_∞ lineal S/KS/T.

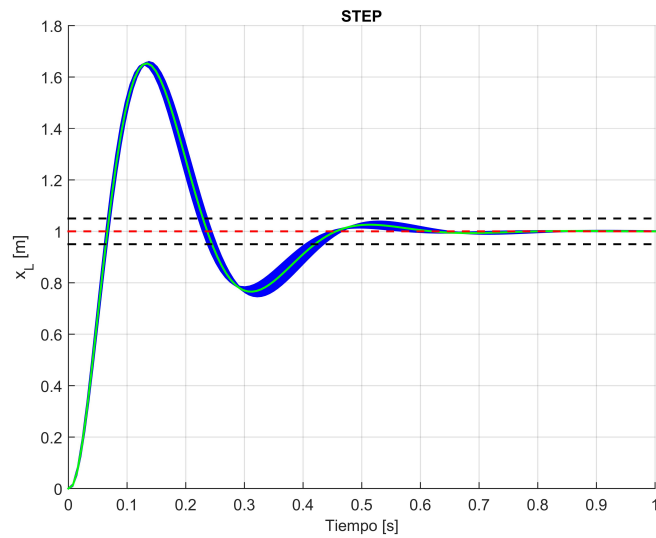


Figura 6.11 Respuesta del control \mathcal{H}_∞ lineal S/KS/T de la altitud de la carga ante una familia de plantas lineales. Simulación realizada con el comando "step" de Matlab.

6.1.4 Simulación con la planta no lineal

En la Tabla 6.1 se resumen las especificaciones conseguidas para los controles \mathcal{H}_∞ lineales. Las simulaciones especificadas en la Subsección 5.2.1 se muestran de la Figura 6.12 a la Figura 6.22. Los índices de bondad conseguidos en las simulaciones se resumen en la Tabla 6.2.

Dada la extrema lentitud del método de integración explícito "ODE45" en las simulaciones se ha decidido pasar a usar el método de integración implícito "ODE15s", de paso variable, y con un paso de integración máximo fijado de nuevo en 0.01 s. Esta solución también es aconsejada en la documentación de Matlab para casos en los que el método "ODE45" resulta lento o ineficiente. Además, previamente se realizaron algunos tests con controles que permitían una ejecución de las simulaciones más rápida con ambos métodos de integración, alcanzando prácticamente los mismos índices de bondad.

Tabla 6.1 Especificaciones conseguidas para el control de actitud del quadrotor, y de posición horizontal y altitud \mathcal{H}_∞ lineal de la carga.

Subsistema	Control	t_s [s]	t_e [s]	SO [%]
Actitud quadrotor	PID	0.081	0.095	0
Posición horizontal carga	\mathcal{H}_∞ lineal GS/T	0.19	1.8	84
Altitud carga	\mathcal{H}_∞ lineal S/KS/T	0.16	0.67	45

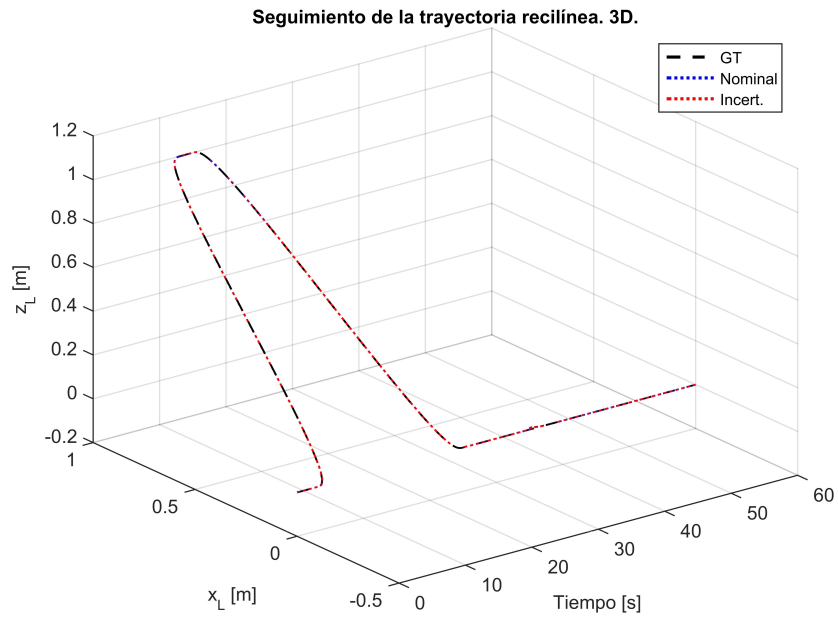
Trayectoria rectilínea:

Figura 6.12 Simulación de los controles \mathcal{H}_∞ lineales frente a la planta no lineal y ante la trayectoria rectilínea definida en Subsección 5.2.1. 3 dimensiones.

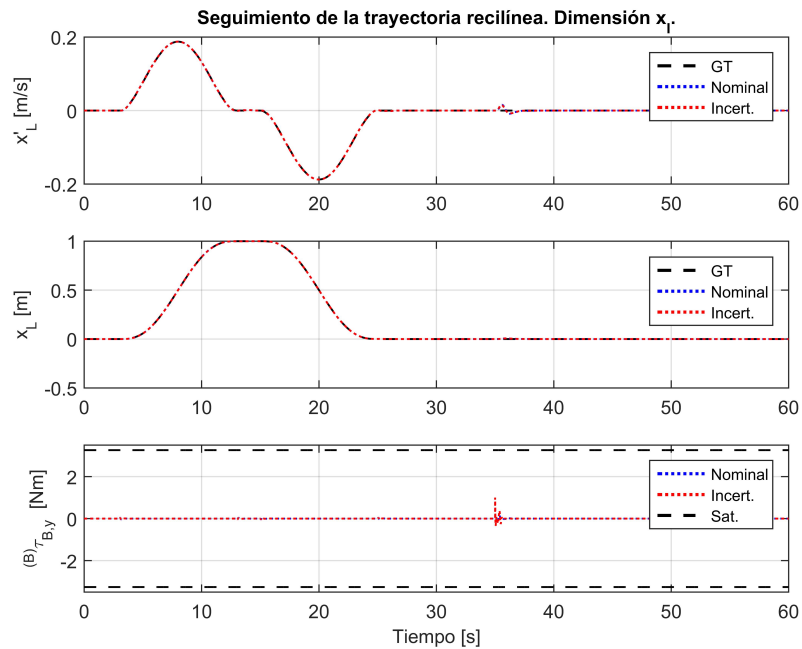


Figura 6.13 Simulación de los controles \mathcal{H}_∞ lineales frente a la planta no lineal y ante la trayectoria rectilínea definida en Subsección 5.2.1. Dimensión x_L .

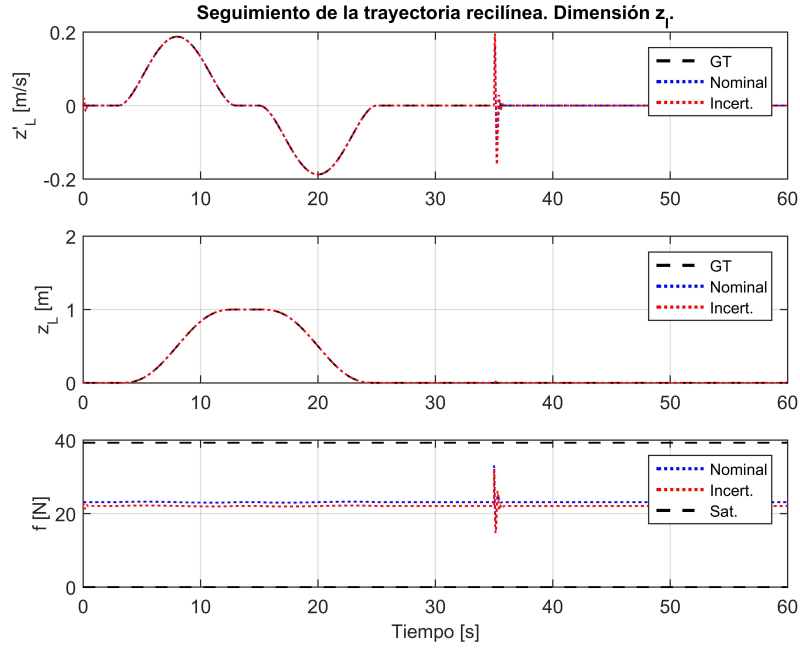


Figura 6.14 Simulación de los controles \mathcal{H}_∞ lineales frente a la planta no lineal y ante la trayectoria rectilínea definida en Subsección 5.2.1. Dimensión z_L .

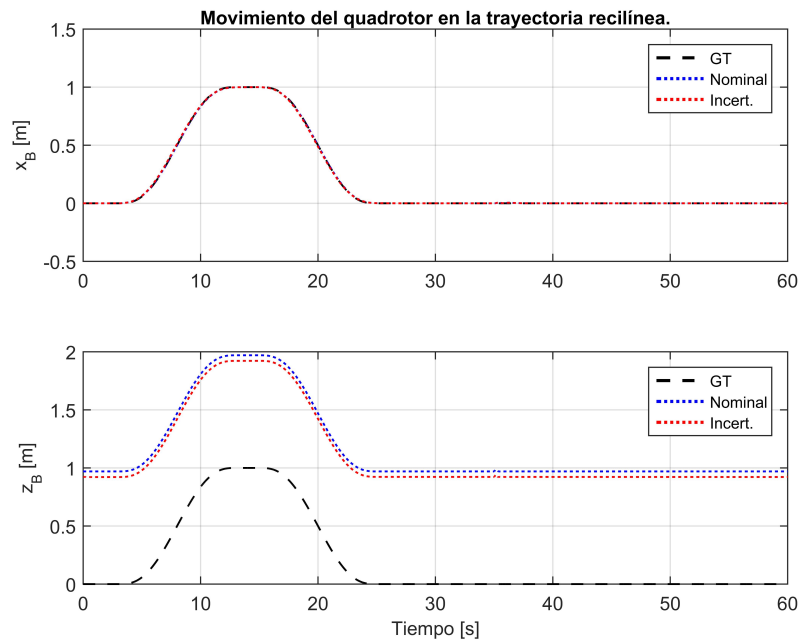


Figura 6.15 Simulación de los controles \mathcal{H}_∞ lineales frente a la planta no lineal y ante la trayectoria rectilínea definida en Subsección 5.2.1. Movimiento del quadrotor.

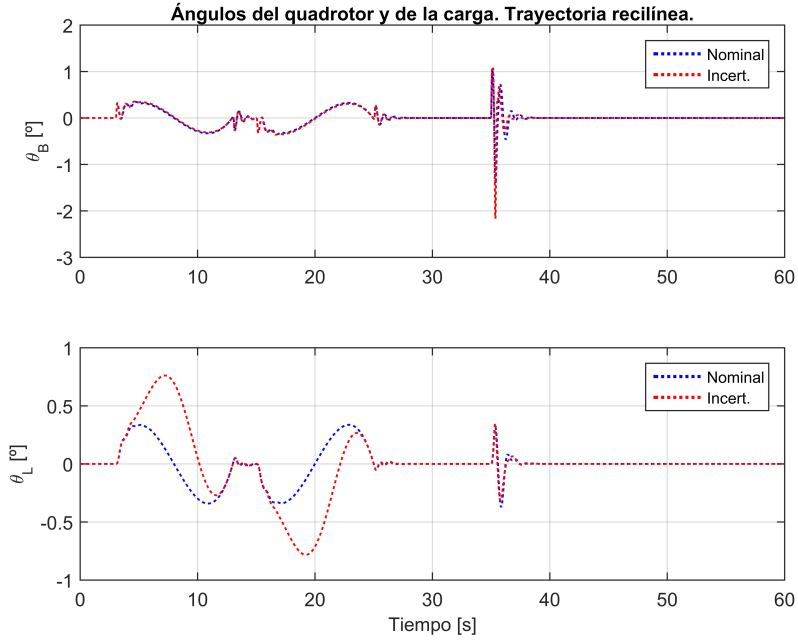


Figura 6.16 Simulación de los controles \mathcal{H}_∞ lineales frente a la planta no lineal y ante la trayectoria rectilínea definida en Subsección 5.2.1. Ángulos θ_B y θ_L .

Trayectoria Circular:

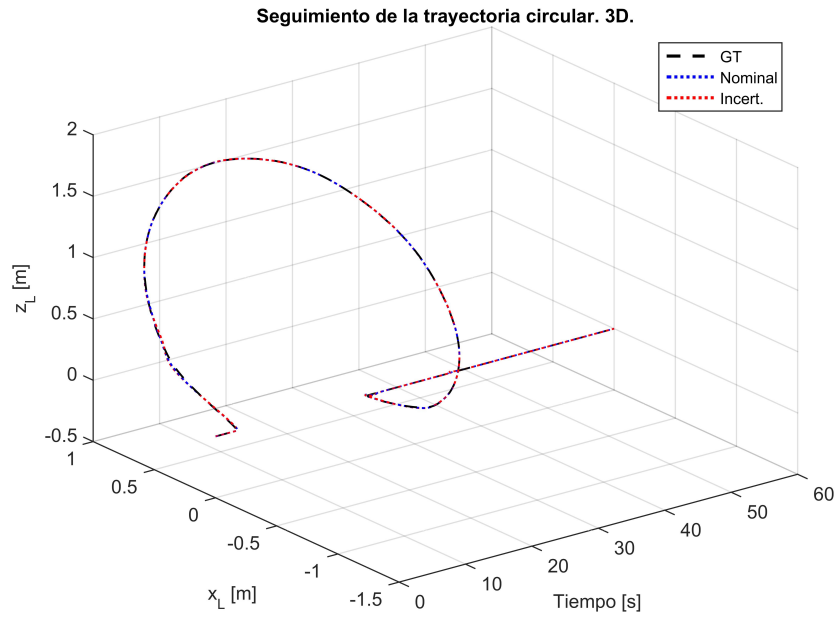


Figura 6.17 Simulación de los controles \mathcal{H}_∞ lineales frente a la planta no lineal y ante la trayectoria circular definida en Subsección 5.2.1. 3 dimensiones.

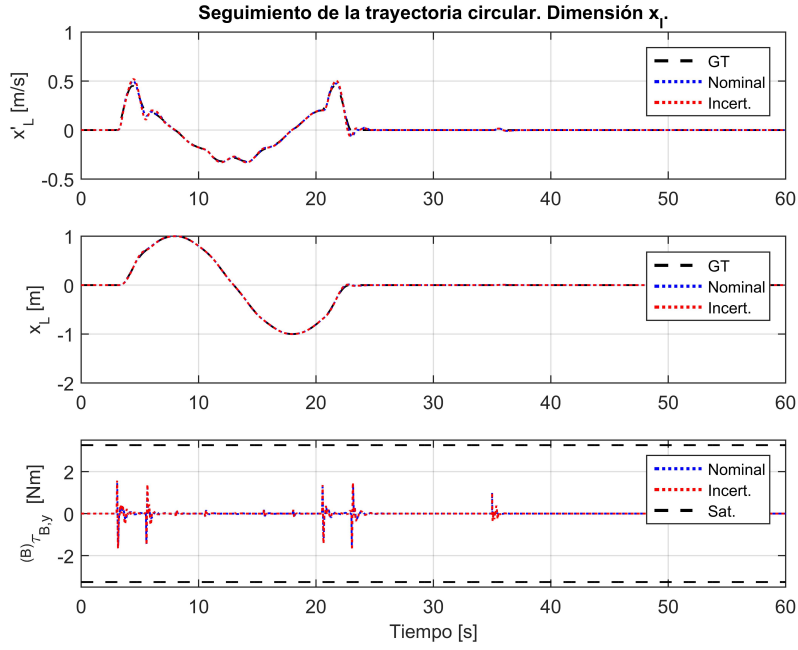


Figura 6.18 Simulación de los controles \mathcal{H}_∞ lineales frente a la planta no lineal y ante la trayectoria circular definida en Subsección 5.2.1. Dimensión x_L .

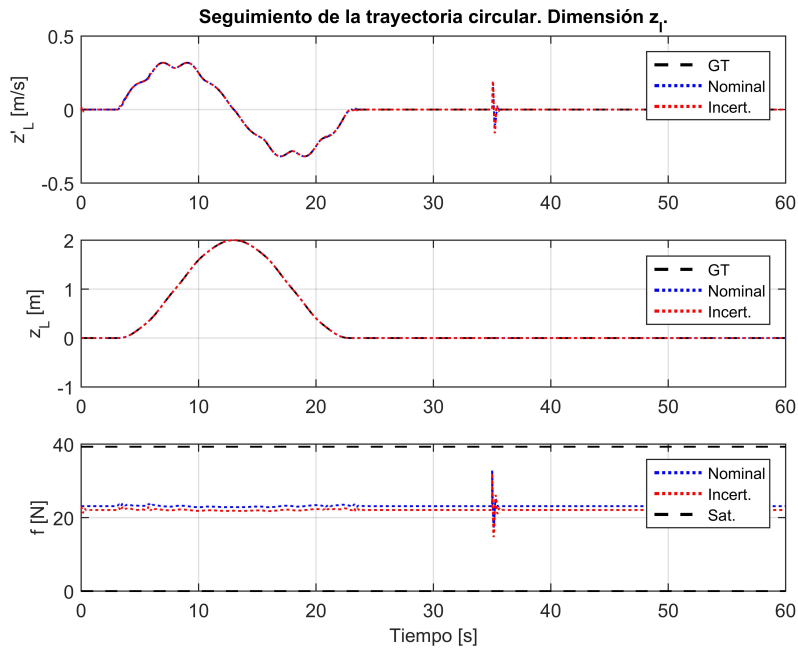


Figura 6.19 Simulación de los controles \mathcal{H}_∞ lineales frente a la planta no lineal y ante la trayectoria circular definida en Subsección 5.2.1. Dimensión z_L .

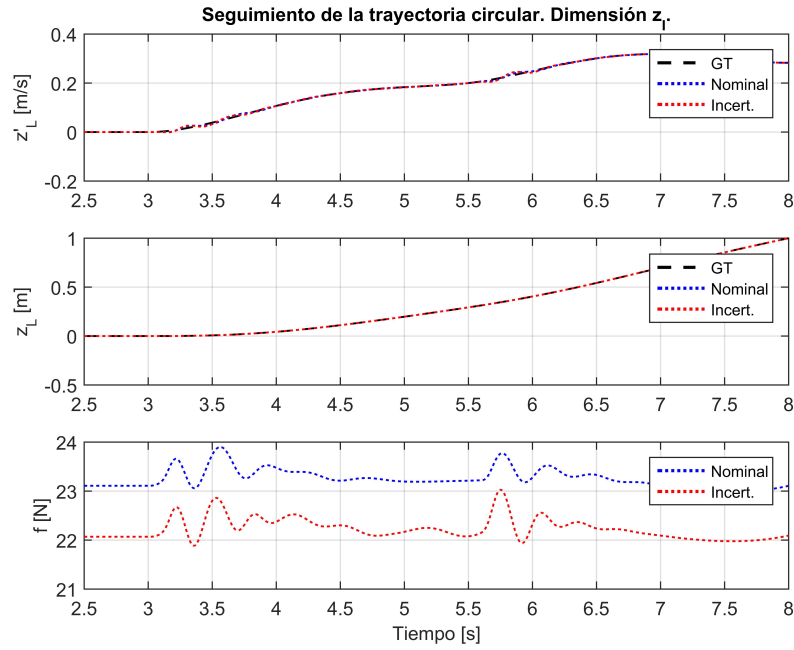


Figura 6.20 Simulación de los controles \mathcal{H}_∞ lineales frente a la planta no lineal y ante la trayectoria circular definida en Subsección 5.2.1. Dimensión z_I con zoom.

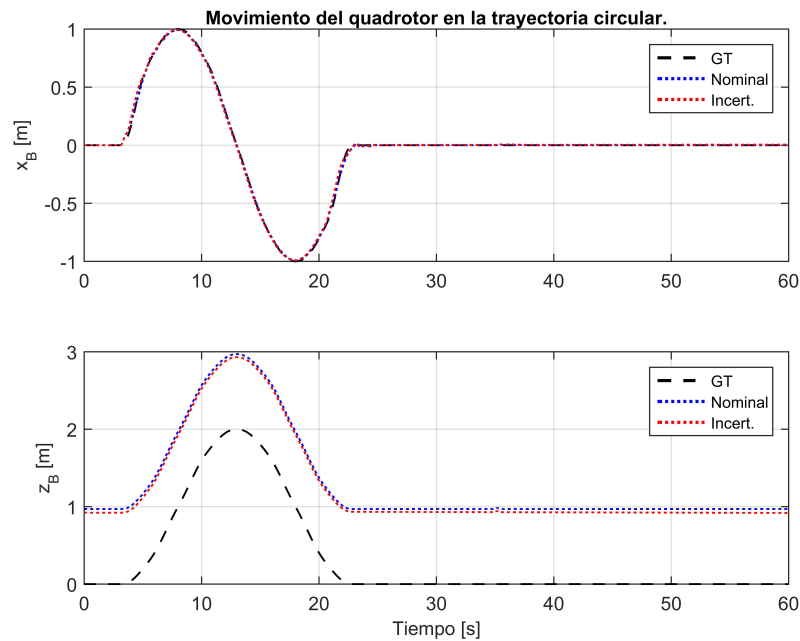


Figura 6.21 Simulación de los controles \mathcal{H}_∞ lineales frente a la planta no lineal y ante la trayectoria circular definida en Subsección 5.2.1. Movimiento del quadrotor.

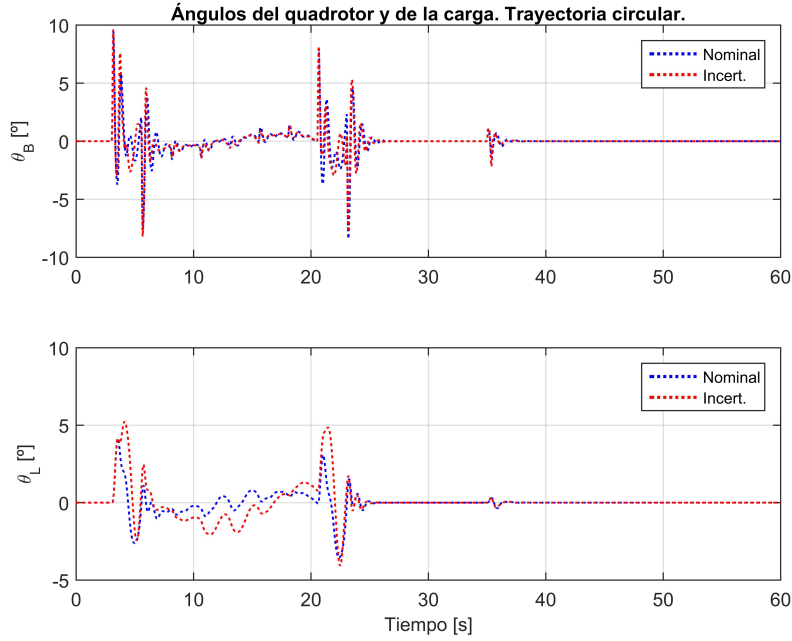


Figura 6.22 Simulación de los controles \mathcal{H}_∞ lineales frente a la planta no lineal y ante la trayectoria circular definida en Subsección 5.2.1. Ángulos θ_B y θ_L .

Índice de bondad ISE:

Tabla 6.2 Índices de bondad para las simulaciones de los controles \mathcal{H}_∞ lineales de posición y altitud.

ISE	T. rectilínea		T. circular	
	x_c [m ²]	z_c [m ²]	x_c [m ²]	z_c [m ²]
Nominal	$4.571 \cdot 10^{-5}$	$3.377 \cdot 10^{-5}$	$1.087 \cdot 10^{-3}$	$3.407 \cdot 10^{-5}$
Incertidumbre	$4.541 \cdot 10^{-5}$	$4.087 \cdot 10^{-5}$	$1.889 \cdot 10^{-3}$	$4.125 \cdot 10^{-5}$

Los errores encontrados son similares para los subsistemas de posición horizontal y de altitud en el caso de la trayectoria rectilínea, pero algo diferentes en la trayectoria circular, encontrándose menores errores para el subsistema de posición. Estos hechos se deben a que la trayectoria circular es más exigente en términos de esfuerzos de control que la trayectoria rectilínea, junto con que el control del subsistema de altitud da lugar a un comportamiento mucho menos oscilatorio y un tiempo de subida mayor. También se ha comprobado, comparando estas simulaciones con simulaciones sin perturbaciones, que ambos controles poseen un comportamiento integral muy parecido.

Comparando los índices de bondad con los controles del capítulo anterior, se tienen menores errores que los hallados para los controles PID, y mayores que los encontrados para los controles LQR. Por otro lado, mirando especialmente las figuras correspondientes a la trayectoria circular, se ha logrado una reducción del esfuerzo de control ${}^{(c)}\tau_{L,y}$ con respecto a los dos controles PID y LQR.

En cuanto a los ángulos del quadrotor en la trayectoria circular, los controles \mathcal{H}_∞ lineales exigen una dinámica de mayor frecuencia de oscilación que los anteriores controles lineales. Sin embargo, los ángulos que adquiere la carga en la trayectoria circular son parecidos a los de los anteriores controles lineales.

De nuevo, los comportamientos nominales y con incertidumbres son muy similares, aunque con diferencias ligeramente mayores a las vistas en los casos con controles PID y LQR. Las mayores diferencias se alcanzan de nuevo en el ángulo de la carga θ_c . Se puede concluir estabilidad y comportamientos robustos.

En resumen, los controles \mathcal{H}_∞ lineales aquí diseñados consiguen una respuesta del sistema parecida a los dos controles lineales anteriores. Más concretamente, se consiguen mejores índices de bondad que con los controles PID, pero algo peores que los logrados con los controles LQR. Por otro lado, dada la respuesta tan oscilatoria del subsistema de posición horizontal ante una referencia en escalón se podría esperar que el sistema pueda inestabilizarse o pueda presentar comportamientos inesperados ante trayectorias de referencia más agresivas. Finalmente cabría destacar la gran dedicación de tiempo en la búsqueda y entendimiento de controles \mathcal{H}_∞ lineales que no incluyan la inversión de la planta en el control (o en soluciones combinadas con controles \mathcal{H}_∞ lineales), así como en la iteración con las matrices de ponderación de los controles finalmente elegidos, para finalmente llegar a comportamientos parecidos, aunque algo peores en términos de propiedades de seguimiento de trayectorias, a los conseguidos por los controles LQR.

6.2 Control robusto \mathcal{H}_∞ no lineal con efecto integral

La planta que se usará para el diseño de este control será la ecuación no lineal definida en (5.1), pero forzando $c_D = 0$. Además, el diseño de este tipo de control requiere evitar términos nulos en la diagonal de la matriz de masas, $M(q)$, siendo necesaria una modificación adicional. Con tal fin, se despejarán las variables \ddot{x}_c y \ddot{z}_c de las dos primeras filas de (5.1), y se aplicarán sobre la tercera fila. Finalmente, la planta a usar en esta sección quedaría:

$$\begin{aligned} \tau + \delta(q, \dot{q}, \ddot{q}) &= M(q) \ddot{q} + \nu(q, \dot{q}) + G(q) \\ \begin{bmatrix} f s_{\theta_B} \\ f c_{\theta_B} \\ l f (s_{\theta_B} c_{\theta_c} - c_{\theta_B} s_{\theta_c}) \\ {}^{(B)}T_{B,\dot{y}} \end{bmatrix} + \delta(q, \dot{q}, \ddot{q}) &= \begin{bmatrix} m & 0 & l m_B c_{\theta_c} & 0 \\ 0 & m & -l m_B s_{\theta_c} & 0 \\ 0 & 0 & m_B l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^{(B)}I_B^{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{z}_c \\ \ddot{\theta}_c \\ \ddot{\theta}_B \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} -l m_B \dot{\theta}_c^2 s_{\theta_c} \\ -l m_B \dot{\theta}_c^2 c_{\theta_c} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.4)$$

donde $\delta(q, \dot{q}, \ddot{q})$ representa el efecto de las incertidumbres y de perturbaciones externas.

Se puede notar que la planta no lineal posee igualmente una estructura en cascada: el lazo interno sería nuevamente la actitud del quadrotor, mientras que el lazo externo estaría compuesto por la posición horizontal, la altitud, y el ángulo de la carga. Además, la ecuación relativa a la actitud de la carga es lineal. Por tanto, podrían plantearse 2 estrategias de control: un único control \mathcal{H}_∞ no lineal para todo el sistema (controlando la carga), o un control \mathcal{H}_∞ no lineal para la altitud de la carga, posición horizontal de la carga y ángulo de la carga, manteniendo el control lineal PID diseñado en la Sección 5.4 para la actitud del quadrotor. Con la intención de evaluar qué estrategia de control conviene más, se realizaron pruebas usando ambas estrategias, obteniéndose las mismas conclusiones que las halladas en la sección del control LQR: se observa una mayor complejidad a la hora de conseguir un buen comportamiento del sistema frente a perturbaciones para la opción de un único control para todo el sistema. Se opta por tanto por una estrategia en cascada, manteniendo el control lineal PID del lazo de actitud del quadrotor ya diseñado, y diseñando el control robusto \mathcal{H}_∞ no lineal para el resto del sistema. El esquema de control se muestra en la Figura 6.23.

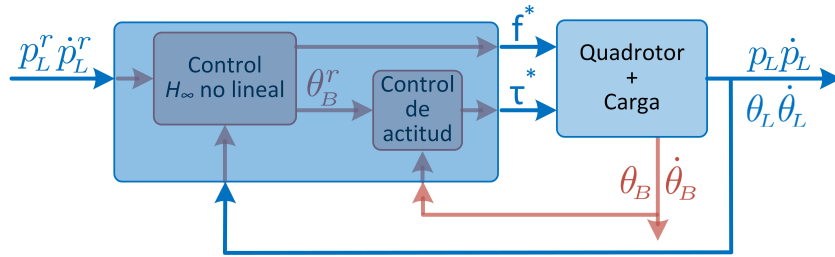


Figura 6.23 Estrategia de control para el control \mathcal{H}_∞ no lineal de la posición de la carga.

Para el diseño del control robusto \mathcal{H}_∞ no lineal con efecto integral se han estudiado y aplicado los pasos dictados en [40] y [39]. Más específicamente, se escoge el control \mathcal{H}_∞ no lineal de [39]. En dicho artículo se aplica el control a un UAV tipo tilt-rotor, controlando la posición del cuerpo en 3D, y añadiendo una acción de control suplementaria para reducir la oscilación de la carga. Sin embargo, en el presente proyecto se tratará de aplicar dicho control a un UAV tipo quadrotor, tratando de controlar directamente las coordenadas de la carga en 2D, y sin acción de control suplementaria para la oscilación de la carga. Además, tal y como se explica algunas líneas más abajo, en este proyecto se aplicará una estructura de control anidado, usando el control \mathcal{H}_∞ no lineal para la posición de la carga, y un control lineal para el control de la actitud del quadrotor. Aunque no se profundizará en demasiados detalles teóricos, se resumirán los principales pasos a tener en cuenta.

A grandes rasgos, el diseño del control robusto \mathcal{H}_∞ no lineal consiste en trasladar la ecuación de la dinámica al espacio de estados, tomando como vector de estados los errores de seguimiento de posición y velocidad. Con algunas modificaciones de por medio, se resuelve una ecuación HJBI (Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs) de la que se obtiene la señal de control a aplicar que minimiza dichos errores de seguimiento.

El sistema en 2 dimensiones cuenta con 2 actuaciones de control (f y ${}^{(B)}\tau_{B,\dot{y}}$), y con 4 DOF (x_c , z_c , θ_c y θ_B). En cuanto a θ_B , puesto que estará controlada por el lazo interno y tiene relación directa con ${}^{(B)}\tau_{B,\dot{y}}$, se considerará como una actuación de control en el diseño del control \mathcal{H}_∞ no lineal, pero sin tener en cuenta su dinámica. Se tendrán por tanto 2 actuaciones (f y θ_B), y 3 DOF (x_c , z_c y θ_c) en el diseño del control \mathcal{H}_∞ no lineal.

El sistema a controlar se dividirá en coordenadas generalizadas reguladas $\mathbf{q}_r = [x_c, z_c]$ (controladas sobre un punto de operación), y estabilizadas $\mathbf{q}_s = \theta_c$ (la derivada de las coordenadas generalizadas estabilizadas se establecerá sobre un punto de referencia fijo). La ecuación (6.4), reordenada y reducida se muestra más abajo, usando el subíndice "R" para referirse a las matrices reordenadas y reducidas, evitando así confusiones con las matrices de (6.4):

$$\boldsymbol{\tau}_R + \boldsymbol{\delta}_R(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \mathbf{M}_R(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_R + \mathbf{C}_R(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_R + \mathbf{G}_R(\mathbf{q})$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_s(\mathbf{q}) \\ \boldsymbol{\tau}_r(\mathbf{q}) \end{bmatrix} + \boldsymbol{\delta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss}(\mathbf{q}_s) & \mathbf{M}_{sr}(\mathbf{q}_s) \\ \mathbf{M}_{rs}(\mathbf{q}_s) & \mathbf{M}_{rr}(\mathbf{q}_s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_s \\ \ddot{\mathbf{q}}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ss}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) & \mathbf{C}_{sr}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \\ \mathbf{C}_{rs}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) & \mathbf{C}_{rr}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_s \\ \dot{\mathbf{q}}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s(\mathbf{q}_s) \\ \mathbf{G}_r(\mathbf{q}_s) \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

\Downarrow

$$\begin{bmatrix} f l (c_{\theta_c} s_{\theta_B} - c_{\theta_B} s_{\theta_c}) \\ f s_{\theta_B} \\ f c_{\theta_B} \end{bmatrix} + \boldsymbol{\delta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} l^2 m_B & 0 & 0 \\ l m_B c_{\theta_c} & m & 0 \\ -l m_B s_{\theta_c} & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_c \\ \ddot{x}_c \\ \ddot{z}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -l m_B \dot{\theta}_c s_{\theta_c} & 0 & 0 \\ -l m_B \dot{\theta}_c c_{\theta_c} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_c \\ \dot{x}_c \\ \dot{z}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g m \end{bmatrix}$$

Antes de continuar, conviene tener una matriz de masas diagonal, de tal manera que no exista acoplamiento entre las coordenadas reguladas y estabilizadas, pudiendo ponderar posteriormente ambas dinámicas de manera independiente. Con este fin, se pre-multiplicará por la matriz de diagonalización \mathbf{T}_M :

$$\mathbf{T}_M = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & -\mathbf{M}_{sr}(\mathbf{q}_s) \mathbf{M}_{rr}^{-1}(\mathbf{q}_s) \\ -\mathbf{M}_{rs}(\mathbf{q}_s) \mathbf{M}_{ss}^{-1}(\mathbf{q}_s) & \mathbb{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c_{\theta_c}/l & 1 & 0 \\ s_{\theta_c}/l & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} T_M \tau_R + T_M \delta(q, \dot{q}, \ddot{q}) &= T_M M_R(q_s) \ddot{q}_R + T_M C_R(q_s, \dot{q}_s) \dot{q}_R + T_M G_R(q_s) \\ &\Downarrow \\ \bar{\tau}_R + \bar{\delta} &= \bar{M}_R(q_s) \ddot{q}_R + \bar{C}_R(q_s, \dot{q}_s) \dot{q}_R + \bar{G}_R(q_s) \end{aligned} \quad (6.6)$$

donde $\overline{M}_R(q_s)$ ha de ser diagonal y definida positiva. La expresión explícita de la ecuación (6.6) se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{c} f l (c_{\theta_{\mathcal{L}}} s_{\theta_{\mathcal{B}}} - c_{\theta_{\mathcal{B}}} s_{\theta_{\mathcal{L}}}) \\ \hline f s_{\theta_{\mathcal{B}}} - f c_{\theta_{\mathcal{L}}} (c_{\theta_{\mathcal{L}}} s_{\theta_{\mathcal{B}}} - c_{\theta_{\mathcal{B}}} s_{\theta_{\mathcal{L}}}) \\ f c_{\theta_{\mathcal{B}}} + f s_{\theta_{\mathcal{L}}} (c_{\theta_{\mathcal{L}}} s_{\theta_{\mathcal{B}}} - c_{\theta_{\mathcal{B}}} s_{\theta_{\mathcal{L}}}) \end{array} \right] + \bar{\delta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \left[\begin{array}{c|cc} l^2 m_{\mathcal{B}} & 0 & 0 \\ \hline 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \ddot{\theta}_{\mathcal{L}} \\ \hline \ddot{x}_{\mathcal{L}} \\ \ddot{z}_{\mathcal{L}} \end{array} \right] + \\
& + \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline -l m_{\mathcal{B}} \dot{\theta}_{\mathcal{L}} s_{\theta_{\mathcal{L}}} & 0 & 0 \\ -l m_{\mathcal{B}} \dot{\theta}_{\mathcal{L}} c_{\theta_{\mathcal{L}}} & 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \dot{\theta}_{\mathcal{L}} \\ \hline \dot{x}_{\mathcal{L}} \\ \dot{z}_{\mathcal{L}} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ g m \end{array} \right]
\end{aligned}$$

El siguiente paso será definir un nuevo sistema en el espacio de estados según el objetivo de control perseguido: control de seguimiento para \mathbf{q}_r , y estabilización para \mathbf{q}_s . El vector de estados quedaría definido según sigue:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_s \\ \hline \dot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{q}}_{r_d}(t) \\ \mathbf{q}_r - \mathbf{q}_{r_d}(t) \\ \int (\mathbf{q}_r - \mathbf{q}_{r_d}(t)) dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_s \\ \tilde{\mathbf{q}}_r \\ \tilde{\mathbf{q}}_r \\ \int \tilde{\mathbf{q}}_r dt \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

con \mathbf{q}_{r_d} denotando la referencia para las variables reguladas, y estableciendo el punto de referencia fijo deseado para la derivada de las coordenadas generalizadas estabilizadas sobre el estado de reposo, $\dot{\mathbf{q}}_{s_d}(t) = \mathbf{0}$. Es decir, se está fijando una oscilación de la carga nula.

Considerando este vector de estados, el nuevo sistema tendría la siguiente forma:

$$\dot{x}(t) = \bar{f}(x, q_s, t) + \bar{g}_0(q, \dot{q}, \dot{q}_d, \ddot{q}_d, t) + \bar{g}(x, q_s, t) \bar{\tau}_R(t) + \bar{k}(x, q_s, t) \bar{\delta}(t) \quad (6.8)$$

donde:

$$\bar{f}(x, q_s, t) = \begin{bmatrix} -\bar{M}_{ss}^{-1}(q_s) \bar{C}_{ss}(q_s, \dot{q}_s) & -\bar{M}_{ss}^{-1}(q_s) \bar{C}_{sr}(q_s, \dot{q}_s) & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ -\bar{M}_{rr}^{-1}(q_s) \bar{C}_{rs}(q_s, \dot{q}_s) & -\bar{M}_{rr}^{-1}(q_s) \bar{C}_{rr}(q_s, \dot{q}_s) & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{bmatrix} x(t)$$

$$\bar{g}_0(q, \dot{q}, \dot{q}_d, \ddot{q}_d, t) = \begin{bmatrix} -\bar{M}_{ss}^{-1}(q_s) (\bar{M}_{ss}(q_s) \ddot{q}_{sd} + \bar{C}_{ss}(q_s, \dot{q}_s) \dot{q}_{sd} + \bar{C}_{sr}(q_s, \dot{q}_s) \dot{q}_{rd} + \bar{G}_s(q_s)) \\ -\bar{M}_{rr}^{-1}(q_s) (\bar{M}_{rr}(q_s) \ddot{q}_{rd} + \bar{C}_{rs}(q_s, \dot{q}_s) \dot{q}_{sd} + \bar{C}_{rr}(q_s, \dot{q}_s) \dot{q}_{rd} + \bar{G}_r(q_s)) \\ \mathbb{O} \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}$$

$$\bar{g}(x, q_s, t) = \bar{k}(x, q_s, t) = \begin{bmatrix} \bar{M}_{ss}^{-1}(q_s) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \bar{M}_{rr}^{-1}(q_s) \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix}$$

con $\dot{q}_d = [\dot{q}_{sd}, \dot{q}_{rd}]^\top$, y con $\ddot{q}_{sd} = \mathbb{O}$. De esta manera, la expresión explícita de la ecuación (6.8) quedaría según se muestra:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_c \\ \ddot{x}_c - \ddot{x}_{c_d} \\ \ddot{z}_c - \ddot{z}_{c_d} \\ \dot{x}_c - \dot{x}_{c_d} \\ \dot{z}_c - \dot{z}_{c_d} \\ x_c - x_{c_d} \\ z_c - z_{c_d} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l m_B \dot{\theta}_c s_{\theta_c}/m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l m_B \dot{\theta}_c c_{\theta_c}/m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_c \\ \dot{x}_c - \dot{x}_{c_d} \\ \dot{z}_c - \dot{z}_{c_d} \\ x_c - x_{c_d} \\ z_c - z_{c_d} \\ \int (x_c - x_{c_d}) dt \\ \int (z_c - z_{c_d}) dt \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{x}_{c_d} \\ -g - \ddot{z}_{c_d} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} 1/(l^2 m_B) & 0 & 0 \\ 0 & 1/m & 0 \\ 0 & 0 & 1/m \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} f l (c_{\theta_c} s_{\theta_B} - c_{\theta_B} s_{\theta_c}) \\ f s_{\theta_B} - f c_{\theta_c} (c_{\theta_c} s_{\theta_B} - c_{\theta_B} s_{\theta_c}) \\ f c_{\theta_B} + f s_{\theta_c} (c_{\theta_c} s_{\theta_B} - c_{\theta_B} s_{\theta_c}) \end{bmatrix} + \bar{\delta}(t) \right\}
\end{aligned}$$

En adelante se omitirán los argumentos de dependencia del tiempo en las variables.

A continuación se trasladará el sistema (6.8) a una formulación de ponderación de los errores. Se perseguirá minimizar los efectos de las perturbaciones sobre los objetivos de control, minimizando al mismo tiempo las actuaciones de control aplicadas. El nuevo vector de estados tendrá la siguiente expresión:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = T_0 x = \begin{bmatrix} T_{11} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{I} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{bmatrix} x \quad (6.9)$$

En [40] y [39] se escoge T_0 tal que $T_{11} = \rho \mathbb{I}$ y $T_{22} = \nu \mathbb{I}$, donde ρ y ν sean escalares positivos, y T_{23} y T_{24} son matrices definidas positivas invariantes en el tiempo. Esta forma elegida por los artículos mencionados para las matrices de ponderación se debe a las restricciones encontradas cuando el sistema completo es controlado por un controlador central. Puesto que x_c y z_c presentan dinámicas distintas, en este trabajo se elegirá $T_{22} = \text{diag}(\nu_1, \nu_2)$ para poder ponderar de manera independiente x_c y z_c respectivamente (T_{11} sería una matriz de $[1 \times 1]$). Así mismo, T_{23} y T_{24} se formarán de manera análoga: $T_{23} = \text{diag}(\nu_3, \nu_4)$ y $T_{24} = \text{diag}(\nu_5, \nu_6)$.

Además del nuevo vector de estados, se seleccionarán las fuerzas generalizadas a optimizar en la resolución del problema del control \mathcal{H}_∞ . Puesto que la variación de energía potencial viene definida por la trayectoria, se considerarán únicamente las fuerzas generalizadas que afecten a la energía

cinética. También se realizará un cambio de variables para minimizar las fuerzas necesarias frente a las peores perturbaciones posibles actuando sobre el sistema. Con todo esto, se definirán variables más generales sobre la acción de control y perturbaciones:

$$\bar{u} + \bar{d} = \bar{M}_R(q_s) T \dot{x} + \bar{C}_R(q_s, \dot{q}_s) T x \quad (6.10)$$

con:

$$\bar{u} + \bar{d} = T_M (u + d); \quad T = \begin{bmatrix} T_{11} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

donde los vectores u y d denotan el esfuerzo de control adicional y las perturbaciones externas respectivamente, y \bar{u} y \bar{d} sus valores normalizados. Las variables u y d serán las variables a minimizar y maximizar respectivamente en el problema de optimización \mathcal{H}_∞ . Es decir, se tratará de buscar el mínimo esfuerzo de control capaz de conseguir las especificaciones deseadas ante las peores perturbaciones posibles. Cabe fijarse en que, considerando $q_d = \mathbb{O}_{[3 \times 1]}$, $\dot{q}_d = \mathbb{O}_{[3 \times 1]}$, $\ddot{q}_d = \mathbb{O}_{[3 \times 1]}$, $T_{11} = 1$, $T_{22} = \mathbb{I}_{[2 \times 2]}$, $T_{23} = \mathbb{O}_{[2 \times 2]}$ y $T_{24} = \mathbb{O}_{[2 \times 2]}$, y considerando la ecuación (6.6), se cumple la siguiente relación:

$$\bar{u} + \bar{d} = \bar{\tau}_R + \bar{\delta} - \bar{G}_R(q_s)$$

Despejando \dot{x} de (6.10) se llega a la siguiente expresión en el espacio de estados, también llamada "ecuación dinámica del error del sistema representada en la forma estándar \mathcal{H}_∞ no lineal", [39]:

$$\dot{x} = f(x, q_s, t) + g(x, q_s, t) \bar{u} + k(x, q_s, t) \bar{d} \quad (6.12)$$

$$f(x, q_s, t) = T_0^{-1} \begin{bmatrix} -\bar{M}_{ss}^{-1} \bar{C}_{ss} & -\bar{M}_{ss}^{-1} \bar{C}_{sr} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ -\bar{M}_{rr}^{-1} \bar{C}_{rs} & -\bar{M}_{rr}^{-1} \bar{C}_{rr} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & T_{22}^{-1} & \mathbb{I} - T_{22}^{-1} T_{23} & -\mathbb{I} + T_{22}^{-1} (T_{23} - T_{24}) \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} & -\mathbb{I} \end{bmatrix} T_0 x$$

$$g(x, q_s, t) = k(x, q_s, t) = T_0^{-1} \begin{bmatrix} \bar{M}_{ss}^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \bar{M}_{rr}^{-1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix}$$

De ahora en adelante se omitirán las dependencias de las funciones, usándolas solo cuando sea necesario.

Comparando (6.8) y (6.12) se puede hallar la relación de \bar{u} y \bar{d} con $\bar{\tau}_R$ y $\bar{\delta}$ respectivamente:

$$\bar{u} = T_c (-F + \bar{\tau}_R); \quad \bar{d} = \bar{M}_R T_c \bar{M}_R^{-1} \bar{\delta};$$

con:

$$T_c = \begin{bmatrix} T_{11} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & T_{22} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} \overline{M}_{ss} \ddot{q}_{sd} + \overline{C}_{ss} \dot{q}_{sd} + \overline{G}_s + \\ + \overline{C}_{sr} (\dot{q}_r + \dot{q}_{rd} - T_{11}^{-1} T_{22} \dot{q}_r - T_{11}^{-1} T_{23} \tilde{q}_r - T_{11}^{-1} T_{24} \int \tilde{q}_r) \\ \overline{M}_{rr} (\ddot{q}_{rd} - T_{22}^{-1} T_{23} \dot{q}_r - T_{22}^{-1} T_{24} \tilde{q}_r) + \overline{G}_r + \\ + \overline{C}_{rs} (\dot{q}_s + \dot{q}_{sd} - T_{22}^{-1} T_{11} \dot{q}_s) + \overline{C}_{rr} (\dot{q}_{rd} - T_{22}^{-1} T_{23} \tilde{q}_r - T_{22}^{-1} T_{24} \int \tilde{q}_r) \end{bmatrix}$$

El problema \mathcal{H}_∞ no lineal está basado en la observación de que la formulación sobre la frecuencia del problema \mathcal{H}_∞ lineal es equivalente al problema de optimización *min-max* en el dominio del tiempo, [40]. Adoptando la formulación dentro del contexto de la teoría de juegos como un juego de suma cero y de 2 jugadores, se puede asumir que el juego consiste en calcular la acción de control u que minimiza un índice de coste para las peores perturbaciones posibles actuando sobre el sistema, manteniendo la estabilidad del lazo cerrado.

Se considerará la ecuación no lineal (6.12), y la variable de coste $\xi = H [h(x)'u']'$, donde $h(x) \in \mathbb{R}^{n_s+3n_r}$ representa una función del vector de estados a ser regulado y estabilizado, $H \in \mathbb{R}^{(3n_r+n_s+n) \times (3n_r+n_s+n)}$ es una matriz de pesos, y $u = T_M^{-1} \bar{u}$ la señal de control.

El problema \mathcal{H}_∞ no lineal consistirá en encontrar el valor más pequeño de $\gamma^* \geq 0$ tal que para cualquier $\gamma \geq \gamma^*$ exista un esfuerzo de control $u = u(x, q_s, t)$ tal que la ganancia \mathcal{L}_2 de la señal de perturbación d a la variable de coste ξ sea menor o igual al nivel de atenuación dado γ . O lo que es lo mismo, $\int_0^\infty \|\xi\|_2^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty \|d\|_2^2 dt$. El término de la izquierda de la inecuación anterior puede escribirse como $\|\xi\|_2^2 = \xi' \xi = [h'(x), u']' H' H [h'(x), u']'$, y la matriz simétrica definida positiva $H' H$ puede ser dividida en las matrices:

$$H' H = \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

Las matrices Q y R son simétricas definidas positivas, y el hecho de que $H' H > \mathbb{O}$ garantiza que $Q - S R^{-1} S' > \mathbb{O}$. De (6.7) y de (6.13), las matrices $Q \in \mathbb{R}^{n_s+3n_r \times n_s+3n_r}$, $S \in \mathbb{R}^{n_s+3n_r \times n}$ y $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ están estructuradas como sigue:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} \\ Q_{21} & Q_2 & Q_{23} & Q_{24} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_3 & Q_{34} \\ Q_{41} & Q_{42} & Q_{43} & Q_4 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \\ S_{31} & S_{32} \\ S_{41} & S_{42} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} R_s & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & R_r \end{bmatrix}$$

La solución del problema de optimización dependerá de la elección de la variable de coste, ξ , y, particularmente, de la elección de la función $h(x)$. En este caso, se tomará $h(x) = x$. Por tanto, de [40] y [39], el problema \mathcal{H}_∞ no lineal admitirá una solución si existe una función $V(x, q_s, t)$, con

$x_0 = 0$ y $V(x_0, q_{s0}, t) \equiv 0$ para $t \geq 0$, que satisfaga la siguiente ecuación de HJBI:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} = & - \min_u \max_d \left(\frac{\partial V}{\partial x} (f + g T_M u + k T_M d) + \frac{\partial V}{\partial q_s} \dot{q}_s - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \gamma^2 d' d + \frac{1}{2} x' Q x + x' S u + \frac{1}{2} u' R u \right) \quad (6.14) \end{aligned}$$

La solución del problema \mathcal{H}_∞ no lineal puede ser reformulada para el caso particular, donde el índice de rendimiento presenta una dependencia cuadrada en u , en una solución explícita para el problema mín – máx. Así pues, el peor caso de las perturbaciones admisibles y la señal de control óptima pueden calcularse derivando respecto d y u respectivamente en la ecuación (6.14):

$$d^* = \frac{1}{\gamma^2} T_M' k \frac{\partial V}{\partial x} \quad (6.15)$$

$$u^* = -R^{-1} \left(S' x + T_M' g \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (6.16)$$

Reemplazando (6.15) y (6.16) en (6.14), se llega a la siguiente ecuación de HJ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f + \frac{\partial V}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} \left[\frac{1}{\gamma^2} k T_M T_M' k' - g T_M R^{-1} T_M' g' \right] \frac{\partial V}{\partial x} - \\ - \frac{\partial V}{\partial x} g T_M R^{-1} S' x + \frac{1}{2} x' (Q - S R^{-1} S') x = 0 \quad (6.17) \end{aligned}$$

para cada $\gamma > \sqrt{\sigma_{\max}(R)} \geq 0$, donde σ_{\max} es el valor singular máximo. El cálculo del esfuerzo de control, u , requerirá encontrar una solución, $V(x, q_s, t)$, de la ecuación HJ anterior. En [39] se propone la siguiente solución:

$$V(x, q_s, t) = \frac{1}{2} x' T_0 \begin{bmatrix} M_{ss} & M_{sr} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ M_{rs} & M_{rr} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & Y & X - Y \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & X - Y & Z + Y \end{bmatrix} T_0 x \quad (6.18)$$

donde M_{ss} , M_{sr} , M_{rs} y M_{rr} constituyen la matriz de inercia del sistema, y X , Y y $Z \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ son matrices simétricas constantes. Además, $Y > \mathbb{O}$ y $Z + Y > \mathbb{O}$ tal que $Z - X Y^{-1} X + 2 X > \mathbb{O}$. T y T_0 son las matrices definidas en (6.11) y (6.9) respectivamente. Si estas matrices verifican la siguiente ecuación:

$$K = \begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & Y & X \\ \mathbb{O} & Y & 2X & Z + 2X \\ \mathbb{O} & X & Z + 2X & \mathbb{O} \end{bmatrix}$$

$$K + Q + \frac{1}{\gamma^2} T' T - (S' + T)' R^{-1} (S' + T) = \mathbb{O} \quad (6.19)$$

entonces, la función $V(\mathbf{x}, \mathbf{q}_s, t)$ constituye una solución para la ecuación HJ (6.17), para un valor de γ lo suficientemente alto.

Finalmente, en [40] y [39] se propone un teorema donde se resume el cálculo del problema \mathcal{H}_∞ no lineal:

"Sea $\gamma > 0$ un valor de atenuación deseado lo suficientemente elevado. Se considera la función diferenciable $V(\mathbf{x}, \mathbf{q}_s, t) \geq 0$ definida en la ecuación (6.18), satisfaciendo la ecuación de HJ (6.17), y las matrices \mathbf{K} y \mathbf{T} cumpliendo la ecuación (6.19). Entonces, el sistema en bucle cerrado correspondiente al sistema formado por la variable de coste ξ y (6.12), junto con la ley de control (6.16), tiene una ganancia \mathcal{L}_2 (en el canal $\mathbf{d} \rightarrow \mathbf{u}$) menor o igual a γ , estando uniformemente acotada. Además, el sistema en bucle cerrado es uniforme y asintóticamente estable con $\mathbf{x} \rightarrow 0$ si $\mathbf{d} \equiv 0$ ".

A continuación se muestran las ecuaciones algebraicas de Riccati a resolver para obtener las matrices \mathbf{T}_{11} , \mathbf{T}_{22} , \mathbf{T}_{24} , \mathbf{X} , \mathbf{T}_{23} , \mathbf{Y} y \mathbf{Z} respectivamente. Estas ecuaciones han sido halladas a través de la ecuación (6.19):

$$\mathbf{Q}_1 + \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{T}'_{11} \mathbf{T}_{11} - (\mathbf{S}'_{11} + \mathbf{T}_{11})' \mathbf{R}_s^{-1} (\mathbf{S}'_{11} + \mathbf{T}_{11}) - \mathbf{S}_{12} \mathbf{R}_r^{-1} \mathbf{S}'_{12} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{Q}_2 + \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{T}'_{22} \mathbf{T}_{22} - (\mathbf{S}'_{22} + \mathbf{T}_{22})' \mathbf{R}_r^{-1} (\mathbf{S}'_{22} + \mathbf{T}_{22}) - \mathbf{S}_{21} \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{S}'_{21} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{Q}_4 + \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{T}'_{24} \mathbf{T}_{24} - \mathbf{S}_{41} \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{S}'_{41} - \mathbf{S}_{42} \mathbf{R}_r^{-1} \mathbf{S}'_{42} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{X} + \mathbf{Q}_{42} + \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{T}'_{24} \mathbf{T}_{22} - \mathbf{S}_{41} \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{S}'_{21} - \mathbf{S}_{42} \mathbf{R}_r^{-1} (\mathbf{S}'_{22} + \mathbf{T}_{22}) = \mathbf{0}$$

$$2\mathbf{X} + \mathbf{Q}_3 + \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{T}'_{23} \mathbf{T}_{23} - \mathbf{S}_{31} \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{S}'_{31} - \mathbf{S}_{32} \mathbf{R}_r^{-1} \mathbf{S}'_{32} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{Y} + \mathbf{Q}_{32} + \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{T}'_{23} \mathbf{T}_{22} - \mathbf{S}_{31} \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{S}'_{21} - \mathbf{S}_{32} \mathbf{R}_r^{-1} (\mathbf{S}'_{22} + \mathbf{T}_{22}) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{Z} + 2\mathbf{X} + \mathbf{Q}_{42} + \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{T}'_{24} \mathbf{T}_{22} - \mathbf{S}_{41} \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{S}'_{21} - \mathbf{S}_{42} \mathbf{R}_r^{-1} (\mathbf{S}'_{22} + \mathbf{T}_{22}) = \mathbf{0}$$

Una vez que la matriz \mathbf{T} ha sido calculada, y a través de la ley de control óptima (6.16), el esfuerzo de control $\bar{\mathbf{u}}^*$ correspondiente al índice \mathcal{H}_∞ óptimo γ es dado por la siguiente expresión:

$$\bar{\mathbf{u}}^* = -\mathbf{T}_M \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{S}' + \mathbf{T}) \mathbf{x} \quad (6.20)$$

Finalmente, si el esfuerzo de control (6.20) es reemplazado en (6.12) bajo la hipótesis de que $\bar{\mathbf{d}} = 0$, y tras algunas manipulaciones, la aceleración de control quedaría:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{\text{cont}} = \ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_I \int \tilde{\mathbf{q}} dt \quad (6.21)$$

con

$$K_D = \begin{bmatrix} K_{D_{ss}} & K_{D_{sr}} \\ K_{D_{rs}} & K_{D_{rr}} \end{bmatrix}; \quad K_P = \begin{bmatrix} \mathbb{O} & K_{P_{sr}} \\ \mathbb{O} & K_{P_{rr}} \end{bmatrix}; \quad K_I = \begin{bmatrix} \mathbb{O} & K_{I_{sr}} \\ \mathbb{O} & K_{I_{rr}} \end{bmatrix};$$

Se considerará el caso particular en el que las matrices que componen $H'H$ verifican $Q = \text{diag}(\omega_{1s}^2, \omega_{1r_1}^2, \omega_{1r_2}^2, \omega_{2r_1}^2, \omega_{2r_2}^2, \omega_{3r_1}^2, \omega_{3r_2}^2)$, $S = \mathbb{O}_{n_s+3n_r \times n}$ y $R = \text{diag}(\omega_{us}^2, \omega_{ur_1}^2, \omega_{ur_2}^2)$.

Resolviendo la ecuación (6.19) se llegan a las siguientes submatrices que componen la matriz T :

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{\omega_{us} \omega_{1s} \gamma}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_{us}^2}} & T_{22} &= \text{diag} \left(\frac{\omega_{ur_1} \omega_{1r_1} \gamma}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_{ur_1}^2}}, \frac{\omega_{ur_2} \omega_{1r_2} \gamma}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_{ur_2}^2}} \right) \\ T_{23} &= \text{diag} \left(\frac{\omega_{ur_1} \gamma \sqrt{\omega_{2r_1}^2 + 2\omega_{1r_1} \omega_{3r_1}}}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_{ur_1}^2}}, \frac{\omega_{ur_2} \gamma \sqrt{\omega_{2r_2}^2 + 2\omega_{1r_2} \omega_{3r_2}}}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_{ur_2}^2}} \right) \\ T_{24} &= \text{diag} \left(\frac{\omega_{ur_1} \omega_{3r_1} \gamma}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_{ur_1}^2}}, \frac{\omega_{ur_2} \omega_{3r_2} \gamma}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_{ur_2}^2}} \right) \end{aligned}$$

Por otro lado, la ecuaciones analíticas para las matrices de ganancias de (6.21) tendrían las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} K_{D_{ss}} &= \overline{M}_{ss}^{-1} (\overline{C}_{ss} + R_s^{-1}) \\ K_{D_{sr}} &= T_{11}^{-1} \overline{M}_{ss}^{-1} (\overline{C}_{sr} - M_{sr} M_{rr}^{-1} R_r^{-1}) T_{22} \\ K_{D_{rs}} &= T_{22}^{-1} \overline{M}_{rr}^{-1} (\overline{C}_{rs} - M_{rs} M_{ss}^{-1} R_s^{-1}) T_{11} \\ K_{D_{rr}} &= T_{22}^{-1} (\overline{M}_{rr}^{-1} (\overline{C}_{rr} + R_r^{-1}) T_{22} + T_{23}) \\ K_{P_{sr}} &= T_{11}^{-1} \overline{M}_{ss}^{-1} (\overline{C}_{sr} - M_{sr} M_{rr}^{-1} R_r^{-1}) T_{23} \\ K_{P_{rr}} &= T_{22}^{-1} (\overline{M}_{rr}^{-1} (\overline{C}_{rr} + R_r^{-1}) T_{23} + T_{24}) \\ K_{I_{sr}} &= T_{11}^{-1} \overline{M}_{ss}^{-1} (\overline{C}_{sr} - M_{sr} M_{rr}^{-1} R_r^{-1}) T_{24} \\ K_{I_{rr}} &= T_{22}^{-1} \overline{M}_{rr}^{-1} (\overline{C}_{rr} + R_r^{-1}) T_{24} \end{aligned}$$

Desarrollando las anteriores submatrices se llega a:

$$\begin{aligned}
 K_{D_{ss}} &= \frac{1}{l^2 m_B \omega_{us}^2}, & K_{D_{sr}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 K_{D_{rs}} &= \begin{bmatrix} -\frac{\omega_{1s} (m_B \dot{\theta}_L s_{\theta_L} l^2 \omega_{us}^2 + c_{\theta_L}) \sqrt{\gamma^2 - \omega_{ur1}^2}}{l \omega_{1r1} \omega_{ur1} \omega_{us} m \sqrt{\gamma^2 - \omega_{us}^2}} \\ \frac{\omega_{1s} (-m_B \dot{\theta}_L c_{\theta_L} l^2 \omega_{us}^2 + s_{\theta_L}) \sqrt{\gamma^2 - \omega_{ur2}^2}}{l \omega_{1r2} \omega_{ur2} \omega_{us} m \sqrt{\gamma^2 - \omega_{us}^2}} \end{bmatrix} \\
 K_{D_{rr}} &= \begin{bmatrix} \frac{\omega_{1r1} + m \omega_{ur1}^2 \sqrt{\omega_{2r1}^2 + 2 \omega_{1r1} \omega_{3r1}}}{\omega_{1r1} \omega_{ur1}^2 m} & 0 \\ 0 & \frac{\omega_{1r2} + m \omega_{ur2}^2 \sqrt{\omega_{2r2}^2 + 2 \omega_{1r2} \omega_{3r2}}}{\omega_{1r2} \omega_{ur2}^2 m} \end{bmatrix} \\
 K_{P_{sr}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 K_{P_{rr}} &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\omega_{2r1}^2 + 2 \omega_{1r1} \omega_{3r1}} + m \omega_{3r1} \omega_{ur1}^2}{\omega_{1r1} \omega_{ur1}^2 m} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\omega_{2r2}^2 + 2 \omega_{1r2} \omega_{3r2}} + m \omega_{3r2} \omega_{ur2}^2}{\omega_{1r2} \omega_{ur2}^2 m} \end{bmatrix} \\
 K_{I_{sr}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, & K_{I_{rr}} &= \begin{bmatrix} \frac{\omega_{3r1}}{\omega_{1r1} \omega_{ur1}^2 m} & 0 \\ 0 & \frac{\omega_{3r2}}{\omega_{1r2} \omega_{ur2}^2 m} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

donde ω_{1s} , ω_{1r1} y ω_{1r2} ponderan las derivadas de los errores de posición, ω_{2r1} y ω_{2r2} ponderan los errores de posición, ω_{3r1} y ω_{3r2} ponderan las integrales de los errores de posición, y ω_{us} , ω_{ur1} , ω_{ur2} ponderan los esfuerzos de control.

Substituyendo (6.21) en (6.5) se puede hallar τ_R . Considerando únicamente τ_r , donde $\tau_r = [\tau_{rx_L}, \tau_{rz_L}]^T$, las actuaciones de control pueden calcularse según se muestra:

$$\begin{aligned}
 \theta_{B_d} &= \arctan \left(\frac{\tau_{rx_L}}{\tau_{rz_L}} \right) \\
 f &= \frac{\tau_{rz_L}}{\cos(\theta_{B_d})}
 \end{aligned}$$

Finalmente, los parámetros de ponderación elegidos han sido los siguientes: $\omega_{1s} = 1.35$, $\omega_{1r1} =$

0.4, $\omega_{1r_2} = 0.1$, $\omega_{2r_1} = 0.15$, $\omega_{2r_2} = 10$, $\omega_{3r_1} = 0.25$, $\omega_{3r_2} = 15$, $\omega_{us} = 0.25$, $\omega_{ur_1} = 1$, $\omega_{ur_2} = 1$ y $\gamma = 1.5$. Así pues, las matrices de ganancias tomarían los siguientes valores:

$$\mathbf{K}_D = \begin{bmatrix} 7.59 & 0 & 0 \\ -4.46 c_{\theta_c} - 0.59 \dot{\theta}_c s_{\theta_c} & 1.6 & 0 \\ 17.8 s_{\theta_c} - 2.35 \dot{\theta}_c c_{\theta_c} & 0 & 102 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.13 & 0 \\ 0 & 0 & 193 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.265 & 0 \\ 0 & 0 & 63.6 \end{bmatrix}$$

La razón de la elección de estos parámetros ha sido por iteración con simulaciones, a través del método "prueba-error", teniendo en cuenta al mismo tiempo el significado de los parámetros que forman las matrices \mathbf{K}_P , \mathbf{K}_D y \mathbf{K}_I (ω_{ij_k}). Se comenzó con todos los parámetros igualados a 1 ($\omega_{ij_k} = 1$, con $\gamma > \max(\omega_{us_1}, \omega_{ur_1}, \omega_{ur_2})$), y se fueron variando de manera independiente todos ellos, así como otras pruebas diversas, pudiendo ganar experiencia e intuición en cuanto al comportamiento del sistema en la variación de los distintos parámetros. Posteriormente se trató de minimizar los errores de seguimiento, las oscilaciones, así como conseguir un buen rechazo de perturbaciones. Quizás podrían aplicarse métodos de optimización para tratar de encontrar una combinación mejor de parámetros, aunque no se ha realizado por falta de tiempo.

6.2.1 Simulación con la planta no lineal

Las simulaciones para la trayectoria lineal y circular especificadas en Subsección 5.2.1 se muestran de la Figura 6.24 a la Figura 6.34. Los índices de bondad conseguidos en las simulaciones se resumen en la Tabla 6.3.

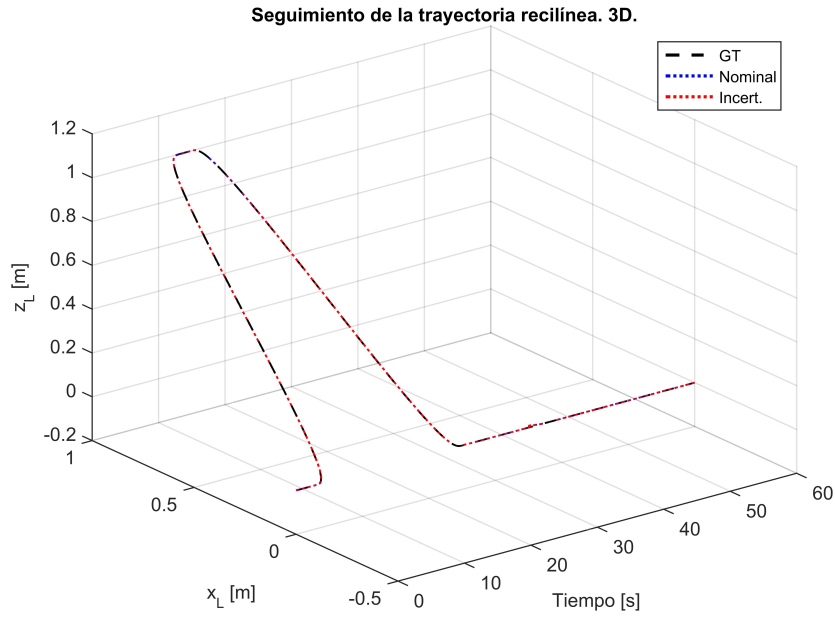
Trayectoria rectilínea:

Figura 6.24 Simulación del control \mathcal{H}_∞ no lineal frente a la planta no lineal y ante la trayectoria rectilínea definida en Subsección 5.2.1. 3 dimensiones.

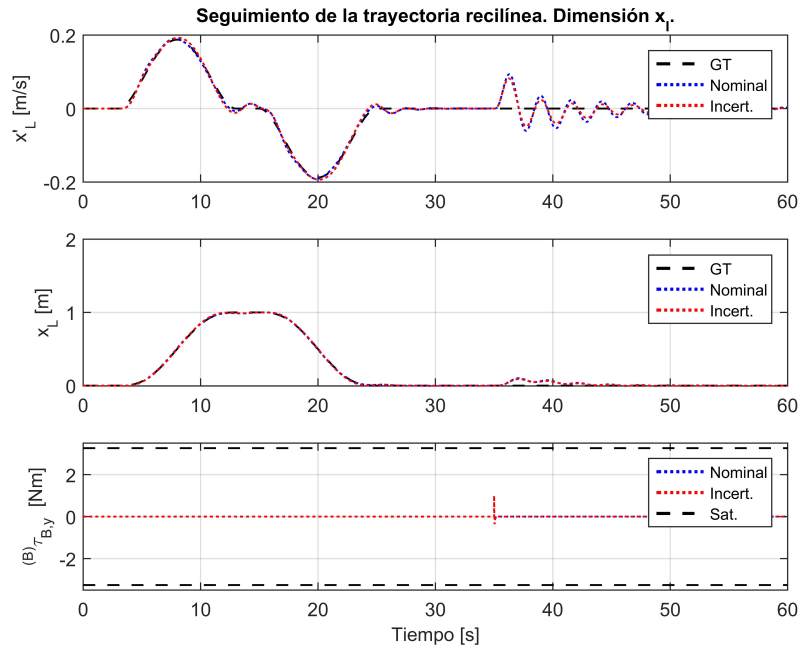


Figura 6.25 Simulación del control \mathcal{H}_∞ no lineal frente a la planta no lineal y ante la trayectoria rectilínea definida en Subsección 5.2.1. Dimensión x_L .

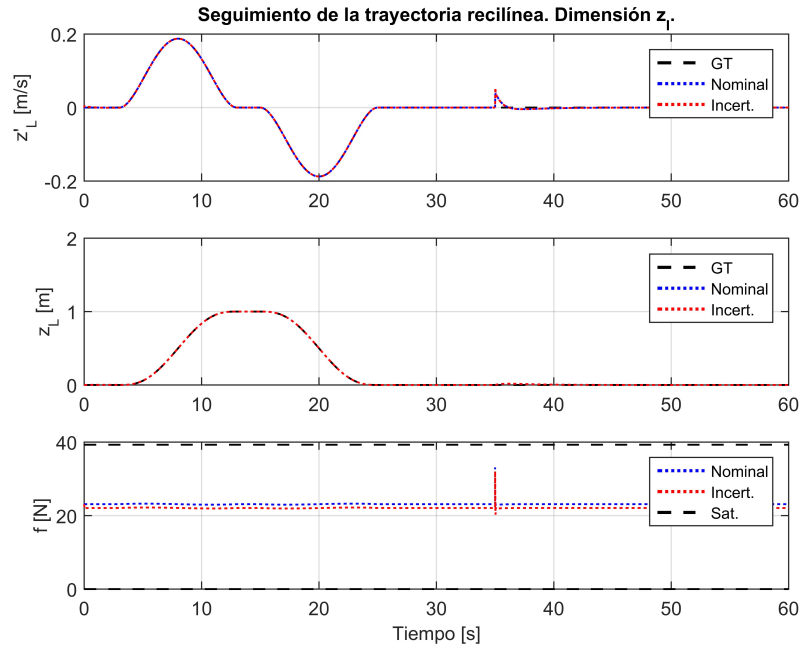


Figura 6.26 Simulación del control \mathcal{H}_∞ no lineal frente a la planta no lineal y ante la trayectoria rectilínea definida en Subsección 5.2.1. Dimensión z_L .

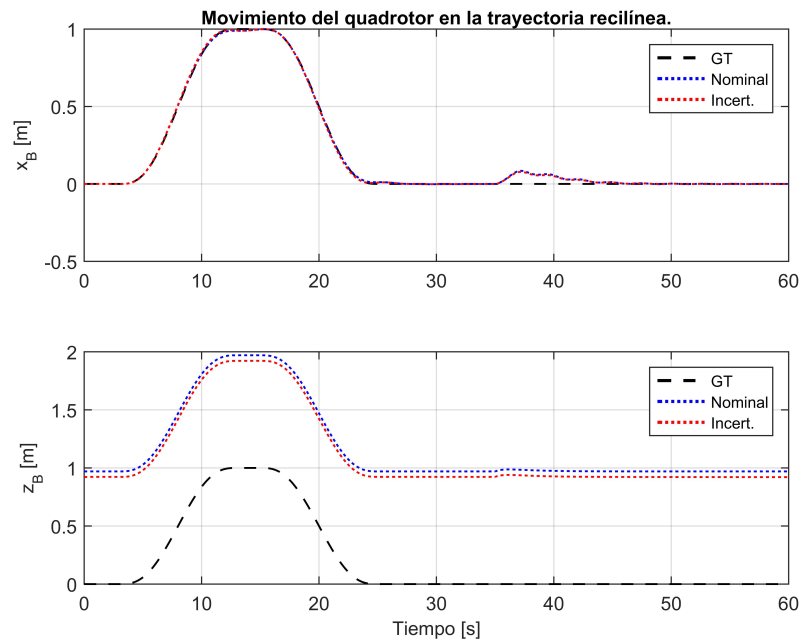


Figura 6.27 Simulación del control \mathcal{H}_∞ no lineal frente a la planta no lineal y ante la trayectoria rectilínea definida en Subsección 5.2.1. Movimiento del quadrotor.

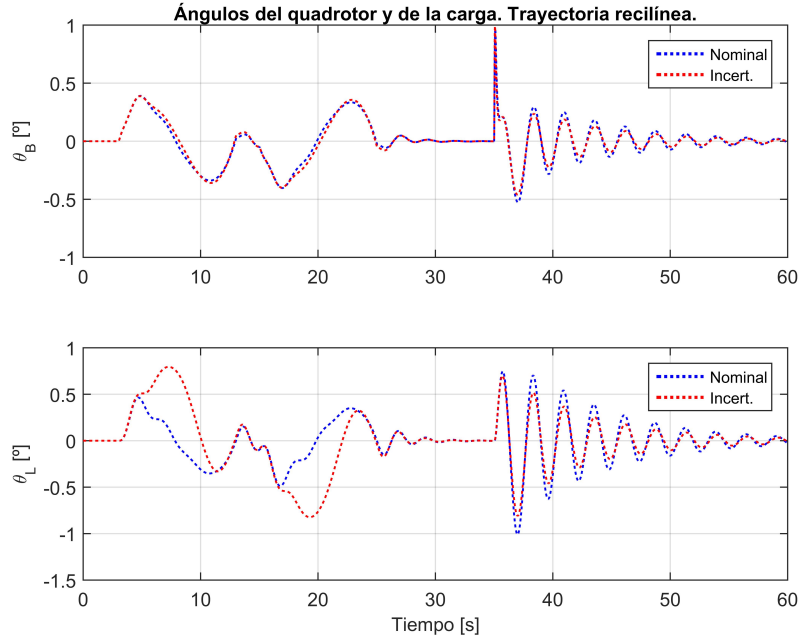


Figura 6.28 Simulación del control \mathcal{H}_∞ no lineal frente a la planta no lineal y ante la trayectoria rectilínea definida en Subsección 5.2.1. Ángulos θ_B y θ_L .

Trayectoria Circular:

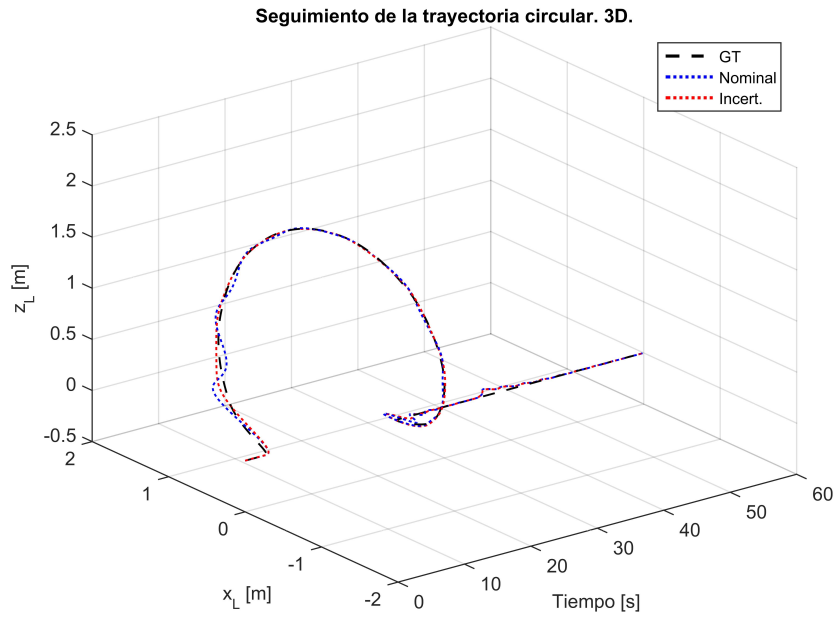


Figura 6.29 Simulación del control \mathcal{H}_∞ no lineal frente a la planta no lineal y ante la trayectoria circular definida en Subsección 5.2.1. 3 dimensiones.

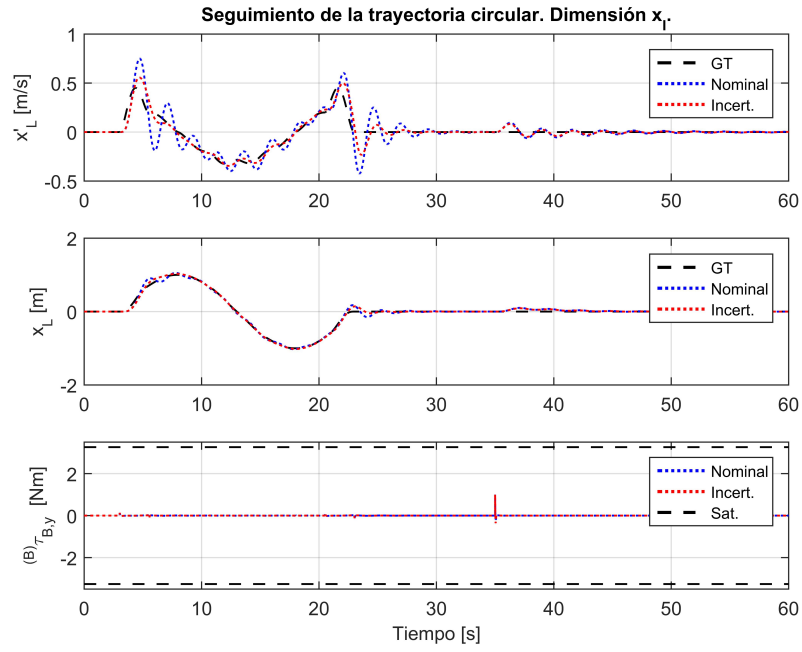


Figura 6.30 Simulación del control \mathcal{H}_∞ no lineal frente a la planta no lineal y ante la trayectoria circular definida en Subsección 5.2.1. Dimensión x_L .

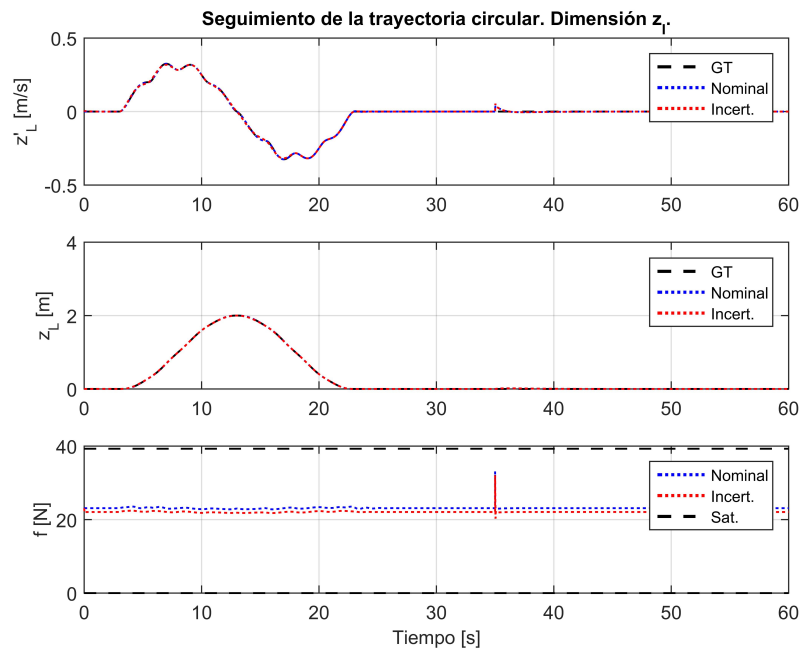


Figura 6.31 Simulación del control \mathcal{H}_∞ no lineal frente a la planta no lineal y ante la trayectoria circular definida en Subsección 5.2.1. Dimensión z_L .

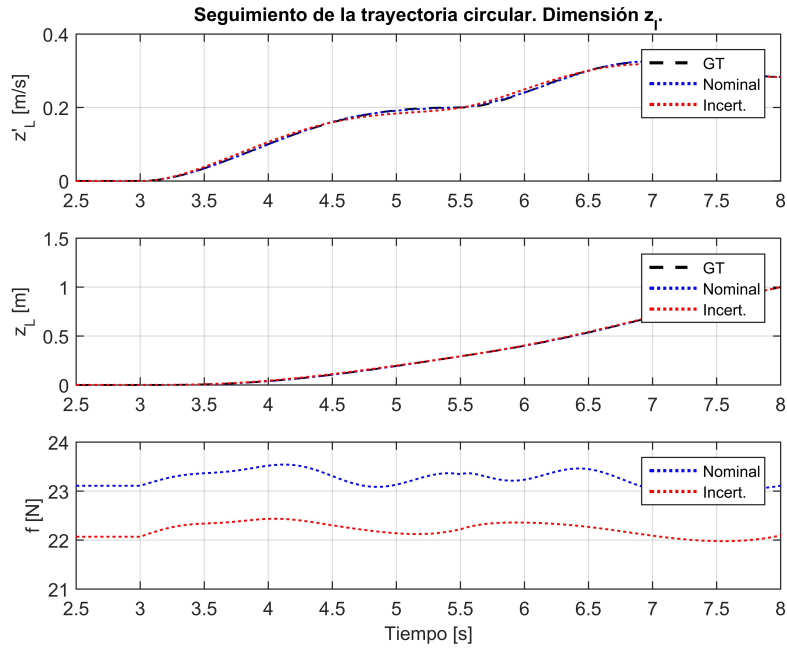


Figura 6.32 Simulación del control \mathcal{H}_∞ no lineal frente a la planta no lineal y ante la trayectoria circular definida en Subsección 5.2.1. Dimensión z_L con zoom.

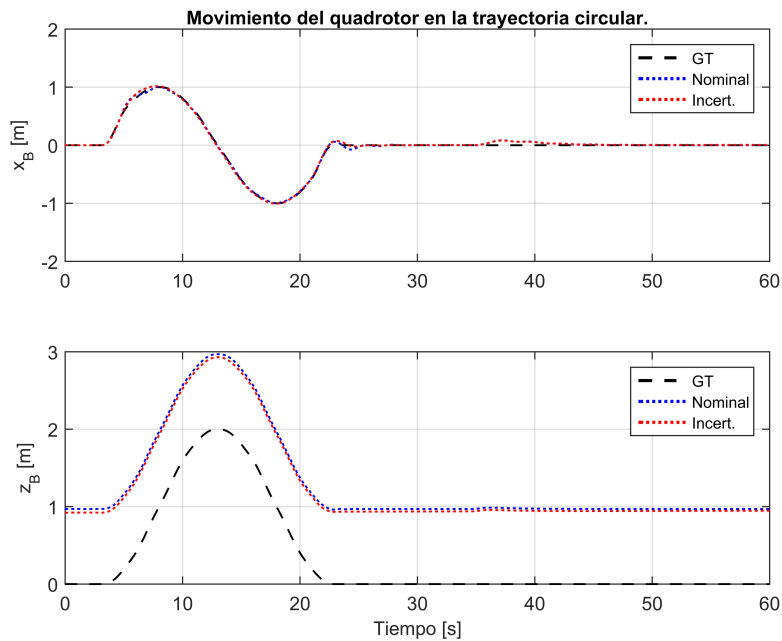


Figura 6.33 Simulación del control \mathcal{H}_∞ no lineal frente a la planta no lineal y ante la trayectoria circular definida en Subsección 5.2.1. Movimiento del quadrotor.

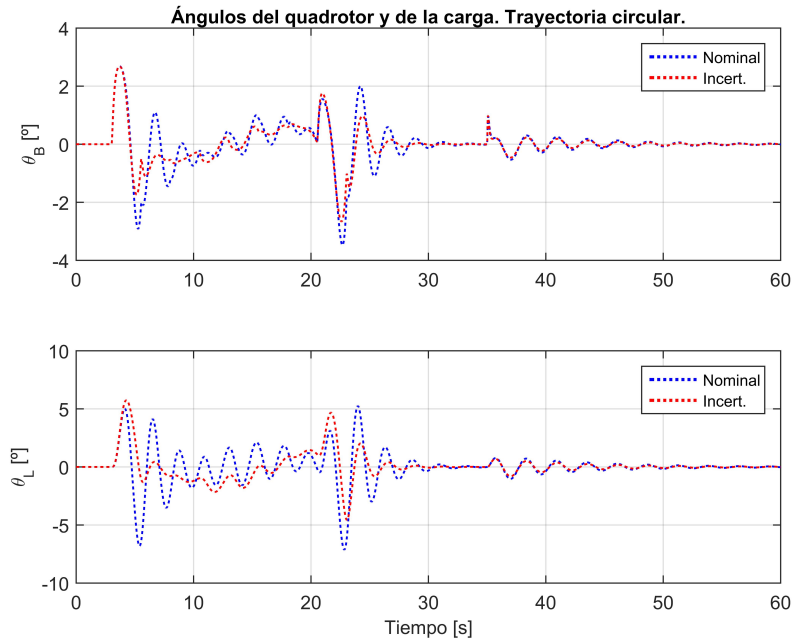


Figura 6.34 Simulación del control \mathcal{H}_∞ no lineal frente a la planta no lineal y ante la trayectoria circular definida en Subsección 5.2.1. Ángulos θ_B y θ_L .

Índice de bondad ISE:

Tabla 6.3 Índices de bondad para las simulaciones del control \mathcal{H}_∞ no lineal de posición y altitud.

ISE	T. rectilínea		T. circular	
	x_c [m ²]	z_c [m ²]	x_c [m ²]	z_c [m ²]
Nominal	$2.576 \cdot 10^{-2}$	$7.353 \cdot 10^{-4}$	$1.124 \cdot 10^{-1}$	$7.356 \cdot 10^{-4}$
Incertidumbre	$2.181 \cdot 10^{-2}$	$7.431 \cdot 10^{-4}$	$6.076 \cdot 10^{-2}$	$7.432 \cdot 10^{-4}$

En este caso la diferencia de los errores encontrados para la posición horizontal de la carga son notablemente mayores que los encontrados para la altitud de la carga en ambas trayectorias. Esto se debe principalmente a la compleja dinámica que presenta el subsistema de posición horizontal, y a la dificultad encontrada en la sintonización de la parte del control correspondiente a dicho subsistema. Además, también se aprecia una disminución de los errores en el caso con incertidumbres para la posición horizontal de la carga debido al amortiguamiento de las oscilaciones de la carga producida por los efectos aerodinámicos. Puesto que el control lineal se diseñó considerando la planta sin los efectos aerodinámicos, el hecho de encontrar un mejor comportamiento cuando se introducen los efectos aerodinámicos también lleva a deducir un comportamiento algo débil del control \mathcal{H}_∞ no lineal para la sintonización aquí mostrada.

Comparando estas simulaciones con simulaciones sin perturbaciones se ha comprobado que

el efecto integral del subsistema de posición horizontal es muy débil en comparación con el del subsistema de altitud, así como en comparación con el del resto de los controles lineales diseñados a lo largo de este proyecto. Esta última comprobación también resulta evidente observando a simple vista las gráficas anteriores, en donde se introducen las perturbaciones a los 35 segundos de simulación.

Comparando ahora los índices de bondad con los controles diseñados hasta ahora, el control \mathcal{H}_∞ no lineal con la sintonización aquí mostrada obtiene los mayores errores en el seguimiento de la trayectoria, principalmente debido al rendimiento alcanzado por el subsistema de posición horizontal de la carga. Por otro lado, centrando el análisis en la trayectoria circular, el esfuerzo de control ${}^{(c)}\tau_{L,y}$, así como los ángulos alcanzados por el quadrotor θ_B , son notablemente menores que para el resto de controles. Por contra, se encuentra una mayor frecuencia de oscilación del ángulo de la carga θ_L para el caso nominal (sin incertidumbres).

El comportamiento nominal y con incertidumbres es similar para el subsistema de altitud, cuyas diferencias son parecidas a las halladas en el control \mathcal{H}_∞ lineal, pero algo mayores comparadas con los controles PID y LQR. En cuanto al subsistema de posición horizontal, los comportamientos nominal y con incertidumbres no son tan similares, pudiéndose comprobar tanto gráficamente como a través de los índices de bondad. Mirando la trayectoria circular, el caso nominal presenta ciertas oscilaciones, no presentes en el caso con incertidumbres debido a los efectos aerodinámicos. Por tanto, se puede concluir estabilidad y comportamiento robustos para este tipo de control, aunque en menor grado que para los 3 controles diseñados anteriormente.

En definitiva, la opción del control \mathcal{H}_∞ no lineal presenta los peores resultados en comparación al resto de los controles, principalmente debido al comportamiento mostrado por el subsistema de posición horizontal de la carga. Algunas de las causas que se barajan sobre estos resultados son la capacidad de este tipo de control ante plantas mal condicionadas, o la necesidad de dedicar una mayor cantidad de tiempo a la ya empleada en la sintonización de las ganancias. Al igual que para los controles \mathcal{H}_∞ lineales, la cantidad de tiempo necesaria para el diseño de este tipo de control es claramente superior a la de los controles lineales PID y LQR, a pesar de que los resultados obtenidos para las ganancias aquí mostradas sean peores.

7 Conclusiones y trabajos futuros

Este Trabajo Fin de Máster ha tratado el problema del transporte aéreo de carga mediante un UAV quadrotor, controlando directamente las coordenadas de la carga. Como ya se comentó en la introducción, esta línea de investigación es relativamente nueva, en donde la mayor parte de la literatura publicada hasta el momento aborda el problema proponiendo controles no lineales como solución. Contados trabajos han propuesto controles lineales, y ninguno, que se sepa, ha propuesto controles robustos para el control de la carga mediante vehículos quadrotors. Además, y hasta donde se tiene constancia, el trabajo de Franz Daviz Bähner, [3], constituye el primer estudio en proponer estrategias de control lineales tipo PID y LQR para el problema en 2D, aunque los sistemas presentaban un retraso en el seguimiento de trayectorias de la carga, solventado a través de estrategias de adelanto de trayectorias. Por otra parte, en dicho trabajo también se trataron estrategias de control no lineales, aunque sin éxito para el problema del control de la carga.

En este proyecto se ha perseguido el objetivo de mejorar el seguimiento de trayectorias de la carga de los controles lineales PID y LQR diseñados en [3] para el caso en 2D, intentando evitar el uso de estrategias de adelanto de la trayectoria, así como conseguir un buen rechazo frente a perturbaciones. Además, también se ha buscado diseñar controles robustos lineal y no lineales, y evaluar sus comportamientos en comparación a los anteriores controles lineales.

En el Capítulo 3 se han deducido las expresiones generales de las ecuaciones del movimiento a través del formalismo de *Newton-Euler*, siendo desarrolladas vectorialmente y en formato matricial en 2D en el Capítulo 4, así como en 3D en el apéndice A. También se ha comprobado que estas expresiones en 2D coinciden con las deducidas en [3] a través del formalismo *Lagrange-Euler*.

En todos los controles diseñados se ha encontrado un mejor comportamiento del conjunto del sistema ante perturbaciones usando un control en cascada tipo P-P en el lazo interno correspondiente a la actitud del quadrotor. De esta manera, los controles PID, LQR, \mathcal{H}_∞ lineal y no lineal se aplican en el lazo externo del subsistema de posición horizontal de la carga y en el subsistema de altitud de la carga.

En el Capítulo 5 se han diseñado controles lineales tipo PID y LQR, consiguiendo eliminar el retraso en el seguimiento de las trayectorias, aunque a costa de obtener una respuesta más oscilatoria ante referencias en escalón. De entre los dos controles, el que presenta mejores propiedades de seguimiento, de rechazo de perturbaciones y de esfuerzos de control ha sido el control LQR, aunque la solución encontrada por el control PID resulta igualmente válida.

En el Capítulo 6 se han diseñado los controles robustos \mathcal{H}_∞ lineal y no lineal. El diseño de ambos controles ha sido de notable complejidad.

En el problema del control robusto \mathcal{H}_∞ lineal no ha sido posible aplicar una estrategia de Sensibilidad Mixta S/KS/T para el subsistema de posición horizontal de la carga puesto que este algoritmo suele dar lugar a controles con inversión de la planta, y, en este caso, la dinámica de este subsistema presenta un pico de resonancia. En su lugar, se han investigado otras estrategias, optando finalmente por aplicar un algoritmo \mathcal{H}_∞ lineal GS/T para el subsistema de posición horizontal de la carga. Puesto que el algoritmo estándar GS/T conlleva una pérdida de las propiedades del seguimiento de trayectorias, se ha implementado el algoritmo GS/T de 2 DOF en 1 paso, caracterizado por mejorar esta desventaja. Se ha comprobado que el control calculado evita la inversión de la planta, no obstante, se ha encontrado un comportamiento demasiado oscilatorio ante referencias en escalón. Por otra parte, para el subsistema de altitud se ha aplicado el algoritmo \mathcal{H}_∞ lineal S/KS/T, obteniendo comportamientos similares a los controles PID y LQR. En cuanto al comportamiento conjunto del sistema, los resultados obtenidos en las simulaciones se sitúan cercanos a los observados para el control LQR. Sin embargo, se teme que, debido al comportamiento tan oscilatorio del subsistema de posición horizontal de la carga ante referencias en escalón, el conjunto del sistema pueda inestabilizarse o presentar comportamientos inesperados ante trayectorias de referencia de mayor agresividad. Uno de los trabajos futuros que surgen aquí sería el de investigar si el algoritmo GS/T de 2 DOF en 1 paso sigue siendo débil ante cierto tipo de plantas, así como investigar si es posible mejorar las matrices de ponderación usadas en este problema.

Los resultados hallados para el control robusto \mathcal{H}_∞ no lineal han sido sin lugar a duda los peores de entre todos los controles diseñados. Se han encontrado mayores errores en el seguimiento de trayectorias, un peor rechazo de perturbaciones, así como un comportamiento más oscilatorio en el ángulo de la carga θ_c . Además, se ha comprobado que el grado de estabilidad y comportamiento robustos de este tipo de control son inferiores al del resto de los controles. Algunas de las causas que se barajan como justificación de estos resultados son la capacidad de este tipo de control ante plantas mal condicionadas, o la necesidad de dedicar una mayor cantidad de tiempo a la ya empleada en la sintonización de las ganancias.

En definitiva, se ha conseguido el objetivo de un buen diseño de los controles PID y LQR, destacando principalmente los resultados obtenidos con el control LQR. Por otro lado, se ha notado una falta capacidad de los controles robustos lineal y no lineal aquí diseñados ante plantas mal condicionadas o en donde resulta no deseable incorporar la inversión de la planta en el cálculo de los controles. Aunque faltaría por investigar más al respecto, sí que se podría concluir que el esfuerzo y dedicación necesarios para obtener resultados parecidos a los obtenidos con los controles PID y LQR es bastante mayor. De esta manera, se consolidaría con aún más fuerza la idea de la suficiencia de los controles lineales como solución al problema del transporte aéreo de carga mediante quadrotors, controlando directamente la carga.

7.1 Trabajos futuros

Como trabajos futuros se plantean los siguientes puntos:

- Profundizar en el estudio de los controles robustos \mathcal{H}_∞ lineal GS/T, y \mathcal{H}_∞ no lineal aquí planteados. Indagar en las causas que podrían dar lugar a los resultados encontrados.
- Estudio y análisis del control de la posición horizontal de la carga, x_c , y del ángulo de esta, θ_c , conjuntamente a través de un control lineal multivariable, tratando de minimizar θ_c en todo momento. Según se vio en la sección Sección 5.3 con la Matriz de Ganancias Relativas a lo largo de la frecuencia, Figura 5.4, la posición horizontal se podría controlar a bajas frecuencias, mientras que el ángulo de la carga lo haría a altas frecuencias.
- Incorporación de ruidos, imprecisiones y tiempos de muestreo de los sensores.
- Añadir realismo introduciendo el problema de la adición de una cámara y de un estimador para la estimación del ángulo y velocidad angular de la carga.
- Considerar un modelo aerodinámico más realista para el conjunto del sistema, así como hipótesis más realistas en cuanto al quadrotor y a la carga, a la cuerda que une la carga con el quadrotor, y a la interacción entre la carga y el quadrotor.
- Aplicación al caso en 3D.
- Experimentos reales. Traslación al problema en tiempo discreto.

Apéndice A

Ecuaciones matriciales y linealización: 3D

Este apéndice entraría dentro del Capítulo 4. Se abordarán los desarrollos vectoriales en 3 dimensiones de las ecuaciones matriciales deducidas en la Sección 4.1, así como las correspondientes linealizaciones.

A.1 Ecuaciones matriciales: desarrollo vectorial en 3D

A continuación se procede con el desarrollo de los vectores de las ecuaciones matriciales de la Sección 4.1 para el caso en 3D, tanto en coordenadas cuerpo, como en coordenadas de la carga.

Ha de recordarse que se considerarán movimientos angulares del quadrotor y de la carga con respecto a ejes móviles, tal y como ya se comentó en (2.3) y en (2.7). Así pues, desarrollando vectorialmente las expresiones de las velocidades angulares del quadrotor y la carga, (2.3) y (2.7), y sus derivadas:

$${}^{(B)}\boldsymbol{\omega}_B = \mathbf{W}_B(\boldsymbol{\eta}_B) \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}_B = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_B - \dot{\psi}_B s_{\theta_B} \\ \dot{\theta}_B c_{\psi_B} + \dot{\psi}_B c_{\theta_B} s_{\phi_B} \\ \dot{\psi}_B c_{\phi_B} c_{\theta_B} - \dot{\theta}_B s_{\phi_B} \end{bmatrix}$$

$${}^{(B)}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_B = \dot{\mathbf{W}}_B(\boldsymbol{\eta}_B) \dot{\boldsymbol{\eta}}_B + \mathbf{W}_B(\boldsymbol{\eta}_B) \ddot{\boldsymbol{\eta}}_B = \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_B - \ddot{\psi}_B s_{\theta_B} - \dot{\psi}_B \dot{\theta}_B c_{\theta_B} \\ \dot{\psi}_B (\dot{\phi}_B c_{\phi_B} c_{\theta_B} - \dot{\theta}_B s_{\phi_B} s_{\theta_B}) + \ddot{\theta}_B c_{\phi_B} - \dot{\phi}_B \dot{\theta}_B s_{\phi_B} + \ddot{\psi}_B c_{\theta_B} s_{\phi_B} \\ \ddot{\psi}_B c_{\phi_B} c_{\theta_B} - \ddot{\theta}_B s_{\phi_B} - \dot{\phi}_B \dot{\theta}_B c_{\phi_B} - \dot{\psi}_B (\dot{\phi}_B c_{\theta_B} s_{\phi_B} + \dot{\theta}_B c_{\phi_B} s_{\theta_B}) \end{bmatrix}$$

$${}^{(L)}\omega_L = W_L(\eta_L) \cdot \dot{\eta}_L = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_L \\ \dot{\theta}_L c_{\phi_L} \\ -\dot{\theta}_L s_{\phi_L} \end{bmatrix}$$

$${}^{(L)}\ddot{\alpha}_L = \dot{W}_L(\eta_L) \dot{\eta}_L + W_L(\eta_L) \ddot{\eta}_L = \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_L \\ \ddot{\theta}_L c_{\phi_L} - \dot{\phi}_L \dot{\theta}_L s_{\phi_L} \\ -\ddot{\theta}_L s_{\phi_L} - \dot{\phi}_L \dot{\theta}_L c_{\phi_L} \end{bmatrix}$$

En cuanto al vector de fuerzas generalizadas, será el mismo para ambos casos de matrices en coordenadas cuerpo y coordenadas carga, teniendo la siguiente forma:

$$\tau = \begin{bmatrix} f (s_{\phi_B} s_{\psi_B} + c_{\phi_B} c_{\psi_B} s_{\theta_B}) \\ -f (c_{\psi_B} s_{\phi_B} - c_{\phi_B} s_{\psi_B} s_{\theta_B}) \\ f c_{\phi_B} c_{\theta_B} \\ {}^{(L)}\tau_{L,x} \\ {}^{(L)}\tau_{L,y} \\ 0 \\ a (f_2 - f_4) \\ a (f_1 - f_3) \\ \frac{\kappa_{dr}}{\kappa_{th}} (f_1 - f_2 + f_3 - f_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ {}^{(L)}\tau_{L,x} \\ {}^{(L)}\tau_{L,y} \\ 0 \\ {}^{(B)}\tau_{B,\hat{x}} \\ {}^{(B)}\tau_{B,\hat{y}} \\ {}^{(B)}\tau_{B,\hat{z}} \end{bmatrix}$$

donde ${}^{(L)}\tau_L = 0$, como ya se vio en (3.13) y (3.15).

A.1.1 Coordenadas del cuerpo

El vector de coordenadas generalizadas desarrollado vectorialmente para el caso en coordenadas del cuerpo y en 3D viene dado por:

$$\mathbf{q} = [x_B, y_B, z_B, \phi_L, \theta_L, 0, \phi_B, \theta_B, \psi_B]^\top$$

No obstante, solo se usarán las variables de coordenadas y fuerzas generalizadas de interés, eliminando las filas de ceros (la correspondiente a ψ_L):

$$\mathbf{q} = [x_B, y_B, z_B, \phi_L, \theta_L, \phi_B, \theta_B, \psi_B]^\top$$

$$\tau = [f_x, f_y, f_z, {}^{(L)}\tau_{L,x}, {}^{(L)}\tau_{L,y}, {}^{(B)}\tau_{B,\hat{x}}, {}^{(B)}\tau_{B,\hat{y}}, {}^{(B)}\tau_{B,\hat{z}}]^\top$$

Ha de considerarse que tanto para este caso de desarrollo vectorial de las matrices en coordenadas cuerpo, como para el caso en coordenadas carga, se tendrán en cuenta las derivadas directas de las

coordenadas generalizadas definidas en cada caso.

Finalmente, desarrollando los vectores de las matrices (4.2), se llega a las siguientes ecuaciones matriciales en coordenadas del cuerpo desarrolladas vectorialmente:

$$M(q) = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & l m_{\mathcal{L}} s_{\phi_{\mathcal{L}}} s_{\theta_{\mathcal{L}}} & -l m_{\mathcal{L}} c_{\phi_{\mathcal{L}}} c_{\theta_{\mathcal{L}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & l m_{\mathcal{L}} c_{\phi_{\mathcal{L}}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & l m_{\mathcal{L}} c_{\theta_{\mathcal{L}}} s_{\phi_{\mathcal{L}}} & l m_{\mathcal{L}} c_{\phi_{\mathcal{L}}} s_{\theta_{\mathcal{L}}} & 0 & 0 & 0 \\ m_{\mathcal{L}} s_{\phi_{\mathcal{L}}} s_{\theta_{\mathcal{L}}} & m_{\mathcal{L}} c_{\phi_{\mathcal{L}}} & m_{\mathcal{L}} c_{\theta_{\mathcal{L}}} s_{\phi_{\mathcal{L}}} & l m_{\mathcal{L}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{\mathcal{L}} c_{\theta_{\mathcal{L}}} & 0 & -m_{\mathcal{L}} s_{\theta_{\mathcal{L}}} & 0 & -l m_{\mathcal{L}} c_{\phi_{\mathcal{L}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{xx} & 0 & -{}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{xx} s_{\theta_{\mathcal{B}}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{yy} c_{\phi_{\mathcal{B}}} & {}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{yy} c_{\theta_{\mathcal{B}}} s_{\phi_{\mathcal{B}}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -{}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{zz} s_{\phi_{\mathcal{B}}} & {}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{zz} c_{\phi_{\mathcal{B}}} c_{\theta_{\mathcal{B}}} \end{bmatrix}$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g m \\ g m_{\mathcal{L}} c_{\theta_{\mathcal{L}}} s_{\phi_{\mathcal{L}}} \\ -g m_{\mathcal{L}} s_{\theta_{\mathcal{L}}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} l m_{\mathcal{L}} \left(\dot{\phi}_{\mathcal{L}}^2 c_{\phi_{\mathcal{L}}} s_{\theta_{\mathcal{L}}} + 2 \dot{\phi}_{\mathcal{L}} \dot{\theta}_{\mathcal{L}} c_{\theta_{\mathcal{L}}} s_{\phi_{\mathcal{L}}} + \dot{\theta}_{\mathcal{L}}^2 c_{\phi_{\mathcal{L}}} s_{\theta_{\mathcal{L}}} \right) + c_D \|\mathbf{v}_{\mathcal{L}}\| \left(\dot{x}_{\mathcal{B}} - l \dot{\theta}_{\mathcal{L}} c_{\phi_{\mathcal{L}}} c_{\theta_{\mathcal{L}}} \right) \\ - l m_{\mathcal{L}} \dot{\phi}_{\mathcal{L}}^2 s_{\phi_{\mathcal{L}}} + c_D \|\mathbf{v}_{\mathcal{L}}\| \left(\dot{y}_{\mathcal{B}} + l \dot{\phi}_{\mathcal{L}} \right) \\ l m_{\mathcal{L}} \left(\dot{\phi}_{\mathcal{L}}^2 c_{\phi_{\mathcal{L}}} c_{\theta_{\mathcal{L}}} - 2 \dot{\phi}_{\mathcal{L}} \dot{\theta}_{\mathcal{L}} s_{\phi_{\mathcal{L}}} s_{\theta_{\mathcal{L}}} + \dot{\theta}_{\mathcal{L}}^2 c_{\phi_{\mathcal{L}}} c_{\theta_{\mathcal{L}}} \right) + c_D \|\mathbf{v}_{\mathcal{L}}\| \left(\dot{z}_{\mathcal{B}} + l \dot{\theta}_{\mathcal{L}} c_{\phi_{\mathcal{L}}} s_{\theta_{\mathcal{L}}} \right) \\ l m_{\mathcal{L}} \dot{\theta}_{\mathcal{L}}^2 c_{\phi_{\mathcal{L}}} s_{\phi_{\mathcal{L}}} + c_D \|\mathbf{v}_{\mathcal{L}}\| \left(\dot{x}_{\mathcal{B}} s_{\phi_{\mathcal{L}}} s_{\theta_{\mathcal{L}}} + \dot{y}_{\mathcal{B}} c_{\phi_{\mathcal{L}}} + \dot{z}_{\mathcal{B}} c_{\theta_{\mathcal{L}}} s_{\phi_{\mathcal{L}}} + l \dot{\phi}_{\mathcal{L}} c_{\phi_{\mathcal{L}}} \right) \\ 2 l m_{\mathcal{L}} \dot{\phi}_{\mathcal{L}} \dot{\theta}_{\mathcal{L}} s_{\phi_{\mathcal{L}}} + c_D \|\mathbf{v}_{\mathcal{L}}\| \left(\dot{x}_{\mathcal{B}} c_{\theta_{\mathcal{L}}} - \dot{z}_{\mathcal{B}} s_{\theta_{\mathcal{L}}} - l \dot{\theta}_{\mathcal{L}} c_{\phi_{\mathcal{L}}} \right) \\ - {}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{xx} \dot{\psi}_{\mathcal{B}} \dot{\theta}_{\mathcal{B}} c_{\theta_{\mathcal{B}}} + \\ + ({}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{yy} - {}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{zz}) \left(\dot{\theta}_{\mathcal{B}} c_{\phi_{\mathcal{B}}} + \dot{\psi}_{\mathcal{B}} c_{\theta_{\mathcal{B}}} s_{\phi_{\mathcal{B}}} \right) \left(\dot{\theta}_{\mathcal{B}} s_{\phi_{\mathcal{B}}} - \dot{\psi}_{\mathcal{B}} c_{\phi_{\mathcal{B}}} c_{\theta_{\mathcal{B}}} \right) \\ {}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{yy} \left(\dot{\psi}_{\mathcal{B}} \left(\dot{\phi}_{\mathcal{B}} c_{\phi_{\mathcal{B}}} c_{\theta_{\mathcal{B}}} - \dot{\theta}_{\mathcal{B}} s_{\phi_{\mathcal{B}}} s_{\theta_{\mathcal{B}}} \right) - \dot{\phi}_{\mathcal{B}} \dot{\theta}_{\mathcal{B}} s_{\phi_{\mathcal{B}}} \right) + \\ + ({}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{zz} - {}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{xx}) \left(\dot{\phi}_{\mathcal{B}} - \dot{\psi}_{\mathcal{B}} s_{\theta_{\mathcal{B}}} \right) \left(\dot{\theta}_{\mathcal{B}} s_{\phi_{\mathcal{B}}} - \dot{\psi}_{\mathcal{B}} c_{\phi_{\mathcal{B}}} c_{\theta_{\mathcal{B}}} \right) \\ - {}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{zz} \left(\dot{\psi}_{\mathcal{B}} \left(\dot{\phi}_{\mathcal{B}} c_{\theta_{\mathcal{B}}} s_{\phi_{\mathcal{B}}} + \dot{\theta}_{\mathcal{B}} c_{\phi_{\mathcal{B}}} s_{\theta_{\mathcal{B}}} \right) + \dot{\phi}_{\mathcal{B}} \dot{\theta}_{\mathcal{B}} c_{\phi_{\mathcal{B}}} \right) + \\ + ({}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{yy} - {}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{xx}) \left(\dot{\phi}_{\mathcal{B}} - \dot{\psi}_{\mathcal{B}} s_{\theta_{\mathcal{B}}} \right) \left(\dot{\theta}_{\mathcal{B}} c_{\phi_{\mathcal{B}}} + \dot{\psi}_{\mathcal{B}} c_{\theta_{\mathcal{B}}} s_{\phi_{\mathcal{B}}} \right) \end{bmatrix}$$

A.1.2 Coordenadas de la carga

Para el caso de la ecuación matricial (4.1) en 3D y en coordenadas de la carga se usará el vector de coordenadas generalizadas siguiente:

$$\mathbf{q} = [x_{\mathcal{L}}, y_{\mathcal{L}}, z_{\mathcal{L}}, \phi_{\mathcal{L}}, \theta_{\mathcal{L}}, 0, \phi_{\mathcal{B}}, \theta_{\mathcal{B}}, 0]^{\top}$$

De nuevo, se reducen las coordenadas y fuerzas generalizadas a las variables de interés (eliminando la fila correspondiente a $\psi_{\mathcal{L}}$):

$$\mathbf{q} = [x_{\mathcal{L}}, y_{\mathcal{L}}, z_{\mathcal{L}}, \phi_{\mathcal{L}}, \theta_{\mathcal{L}}, \phi_{\mathcal{B}}, \theta_{\mathcal{B}}]^{\top}$$

$$\boldsymbol{\tau} = [f_x, f_y, f_z, {}^{(\mathcal{L})}\tau_{\mathcal{L},x}, {}^{(\mathcal{L})}\tau_{\mathcal{L},y}, {}^{(\mathcal{B})}\tau_{\mathcal{B},\hat{x}}, {}^{(\mathcal{B})}\tau_{\mathcal{B},\hat{y}}]^{\top}$$

Desarrollando las matrices (4.3), se llega a las siguientes ecuaciones matriciales en coordenadas de la carga desarrolladas vectorialmente:

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & -l m_{\mathcal{B}} s_{\phi_{\mathcal{L}}} s_{\theta_{\mathcal{L}}} & l m_{\mathcal{B}} c_{\phi_{\mathcal{L}}} c_{\theta_{\mathcal{L}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & -l m_{\mathcal{B}} c_{\phi_{\mathcal{L}}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & -l m_{\mathcal{B}} c_{\theta_{\mathcal{L}}} s_{\phi_{\mathcal{L}}} & -l m_{\mathcal{B}} c_{\phi_{\mathcal{L}}} s_{\theta_{\mathcal{L}}} & 0 & 0 & 0 \\ m_{\mathcal{L}} s_{\phi_{\mathcal{L}}} s_{\theta_{\mathcal{L}}} & m_{\mathcal{L}} c_{\phi_{\mathcal{L}}} & m_{\mathcal{L}} c_{\theta_{\mathcal{L}}} s_{\phi_{\mathcal{L}}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{\mathcal{L}} c_{\theta_{\mathcal{L}}} & 0 & -m_{\mathcal{L}} s_{\theta_{\mathcal{L}}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{xx} & 0 & -{}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{xx} s_{\theta_{\mathcal{B}}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{yy} c_{\phi_{\mathcal{B}}} & {}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{yy} c_{\theta_{\mathcal{B}}} s_{\phi_{\mathcal{B}}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -{}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{zz} s_{\phi_{\mathcal{B}}} & {}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{zz} c_{\phi_{\mathcal{B}}} c_{\theta_{\mathcal{B}}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -l m_{\mathcal{B}} (\dot{\phi}_{\mathcal{L}}^2 c_{\phi_{\mathcal{L}}} s_{\theta_{\mathcal{L}}} + 2 \dot{\phi}_{\mathcal{L}} \dot{\theta}_{\mathcal{L}} c_{\theta_{\mathcal{L}}} s_{\phi_{\mathcal{L}}} + \dot{\theta}_{\mathcal{L}}^2 c_{\phi_{\mathcal{L}}} s_{\theta_{\mathcal{L}}}) + c_D \|\mathbf{v}_{\mathcal{L}}\| \dot{x}_{\mathcal{L}} \\ l m_{\mathcal{B}} \dot{\phi}_{\mathcal{L}}^2 s_{\phi_{\mathcal{L}}} + c_D \|\mathbf{v}_{\mathcal{L}}\| \dot{y}_{\mathcal{L}} \\ -l m_{\mathcal{B}} (\dot{\phi}_{\mathcal{L}}^2 c_{\phi_{\mathcal{L}}} c_{\theta_{\mathcal{L}}} - 2 \dot{\phi}_{\mathcal{L}} \dot{\theta}_{\mathcal{L}} s_{\phi_{\mathcal{L}}} s_{\theta_{\mathcal{L}}} + \dot{\theta}_{\mathcal{L}}^2 c_{\phi_{\mathcal{L}}} c_{\theta_{\mathcal{L}}}) + c_D \|\mathbf{v}_{\mathcal{L}}\| \dot{z}_{\mathcal{L}} \\ c_D \|\mathbf{v}_{\mathcal{L}}\| (\dot{x}_{\mathcal{L}} s_{\phi_{\mathcal{L}}} s_{\theta_{\mathcal{L}}} + \dot{y}_{\mathcal{L}} c_{\phi_{\mathcal{L}}} + \dot{z}_{\mathcal{L}} c_{\theta_{\mathcal{L}}} s_{\phi_{\mathcal{L}}}) \\ c_D \|\mathbf{v}_{\mathcal{L}}\| (\dot{x}_{\mathcal{L}} c_{\theta_{\mathcal{L}}} - \dot{z}_{\mathcal{L}} s_{\theta_{\mathcal{L}}}) \\ -{}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{xx} \dot{\psi}_{\mathcal{B}} \dot{\theta}_{\mathcal{B}} c_{\theta_{\mathcal{B}}} + \\ + ({}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{yy} - {}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{zz}) (\dot{\theta}_{\mathcal{B}} c_{\phi_{\mathcal{B}}} + \dot{\psi}_{\mathcal{B}} c_{\theta_{\mathcal{B}}} s_{\phi_{\mathcal{B}}}) (\dot{\theta}_{\mathcal{B}} s_{\phi_{\mathcal{B}}} - \dot{\psi}_{\mathcal{B}} c_{\phi_{\mathcal{B}}} c_{\theta_{\mathcal{B}}}) \\ {}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{yy} (\dot{\psi}_{\mathcal{B}} (\dot{\phi}_{\mathcal{B}} c_{\phi_{\mathcal{B}}} c_{\theta_{\mathcal{B}}} - \dot{\theta}_{\mathcal{B}} s_{\phi_{\mathcal{B}}} s_{\theta_{\mathcal{B}}}) - \dot{\phi}_{\mathcal{B}} \dot{\theta}_{\mathcal{B}} s_{\phi_{\mathcal{B}}}) + \\ + ({}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{zz} - {}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{xx}) (\dot{\phi}_{\mathcal{B}} - \dot{\psi}_{\mathcal{B}} s_{\theta_{\mathcal{B}}}) (\dot{\theta}_{\mathcal{B}} s_{\phi_{\mathcal{B}}} - \dot{\psi}_{\mathcal{B}} c_{\phi_{\mathcal{B}}} c_{\theta_{\mathcal{B}}}) \\ -{}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{zz} (\dot{\psi}_{\mathcal{B}} (\dot{\phi}_{\mathcal{B}} c_{\theta_{\mathcal{B}}} s_{\phi_{\mathcal{B}}} + \dot{\theta}_{\mathcal{B}} c_{\phi_{\mathcal{B}}} s_{\theta_{\mathcal{B}}}) + \dot{\phi}_{\mathcal{B}} \dot{\theta}_{\mathcal{B}} c_{\phi_{\mathcal{B}}}) + \\ + ({}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{yy} - {}^{(\mathcal{B})}I_{\mathcal{B}}^{xx}) (\dot{\phi}_{\mathcal{B}} - \dot{\psi}_{\mathcal{B}} s_{\theta_{\mathcal{B}}}) (\dot{\theta}_{\mathcal{B}} c_{\phi_{\mathcal{B}}} + \dot{\psi}_{\mathcal{B}} c_{\theta_{\mathcal{B}}} s_{\phi_{\mathcal{B}}}) \end{bmatrix}$$

$$G(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g m \\ g m_{\mathcal{L}} c_{\theta_{\mathcal{L}}} s_{\phi_{\mathcal{L}}} \\ -g m_{\mathcal{L}} s_{\theta_{\mathcal{L}}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A.2 Modelos linealizados: desarrollo 3D

El vector de fuerzas generalizadas de interés en 3D linealizado, tanto para coordenadas cuerpo como para coordenadas carga, adopta la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\tau}^\delta = \begin{bmatrix} f_x^\delta \\ f_y^\delta \\ f_z^\delta \\ {}^{(\mathcal{L})}\tau_{\mathcal{L},x}^\delta \\ {}^{(\mathcal{L})}\tau_{\mathcal{L},y}^\delta \\ {}^{(\mathcal{B})}\tau_{\mathcal{B},\hat{x}}^\delta \\ {}^{(\mathcal{B})}\tau_{\mathcal{B},\hat{y}}^\delta \\ {}^{(\mathcal{B})}\tau_{\mathcal{B},\hat{z}}^\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m g \theta_{\mathcal{B}}^\delta \\ -m g \phi_{\mathcal{B}}^\delta \\ (f)^\delta \\ 0 \\ 0 \\ {}^{(\mathcal{B})}\tau_{\mathcal{B},\hat{x}}^\delta \\ {}^{(\mathcal{B})}\tau_{\mathcal{B},\hat{y}}^\delta \\ {}^{(\mathcal{B})}\tau_{\mathcal{B},\hat{z}}^\delta \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

donde se recuerda que el superíndice δ indica que se trata de una variable incremental sobre la que se ha linealizado. También se recuerda que se trabajará con ${}^{(\mathcal{B})}\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{B}}$ sin desarrollar según (2.1).

A.2.1 Coordenadas del cuerpo

El vector de coordenadas generalizadas linealizado y sus derivadas en coordenadas del cuerpo, en 3D y considerando únicamente las variables de interés, quedan definidos según sigue:

$$\mathbf{q}^\delta = [x_{\mathcal{B}}^\delta, y_{\mathcal{B}}^\delta, z_{\mathcal{B}}^\delta, \phi_{\mathcal{L}}^\delta, \theta_{\mathcal{L}}^\delta, \phi_{\mathcal{B}}^\delta, \theta_{\mathcal{B}}^\delta, \psi_{\mathcal{B}}^\delta]^\top$$

$$\dot{\mathbf{q}}^\delta = [\dot{x}_{\mathcal{B}}^\delta, \dot{y}_{\mathcal{B}}^\delta, \dot{z}_{\mathcal{B}}^\delta, \dot{\phi}_{\mathcal{L}}^\delta, \dot{\theta}_{\mathcal{L}}^\delta, \dot{\phi}_{\mathcal{B}}^\delta, \dot{\theta}_{\mathcal{B}}^\delta, \dot{\psi}_{\mathcal{B}}^\delta]^\top$$

$$\ddot{\mathbf{q}}^\delta = [\ddot{x}_{\mathcal{B}}^\delta, \ddot{y}_{\mathcal{B}}^\delta, \ddot{z}_{\mathcal{B}}^\delta, \ddot{\phi}_{\mathcal{L}}^\delta, \ddot{\theta}_{\mathcal{L}}^\delta, \ddot{\phi}_{\mathcal{B}}^\delta, \ddot{\theta}_{\mathcal{B}}^\delta, \ddot{\psi}_{\mathcal{B}}^\delta]^\top$$

Por otra parte, las matrices de la dinámica linealizadas en coordenadas del cuerpo:

$$M^\delta = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & -l m_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & l m_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{(B)}I_B^{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{(B)}I_B^{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{(B)}I_B^{zz} \end{bmatrix}; \quad G^\delta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g \phi_c^\delta \\ -g \theta_c^\delta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con estas matrices y con (A.1), suponiendo condiciones iniciales nulas para la actitud del quadrotor y la carga, las correspondientes transformadas de *Laplace* quedan:

$$\begin{aligned} x_B(s) &= \frac{g \theta_B(s) \left(\frac{l}{g} s^2 + 1 \right)}{s^2 \left(s^2 \frac{l m_B}{g m} + 1 \right)}; & y_B(s) &= \frac{-g \phi_B(s) \left(s^2 \frac{l}{g} + 1 \right)}{s^2 \left(s^2 \frac{l m_B}{g m} + 1 \right)}; & z_B(s) &= \frac{f(s)}{m s^2} \\ \phi_B(s) &= \frac{{}^{(B)}\tau_{B,\hat{x}}(s)}{{}^{(B)}I_B^{xx} s^2}; & \theta_B(s) &= \frac{{}^{(B)}\tau_{B,\hat{y}}(s)}{{}^{(B)}I_B^{yy} s^2}; & \psi_B(s) &= \frac{{}^{(B)}\tau_{B,\hat{z}}(s)}{{}^{(B)}I_B^{zz} s^2} \\ \phi_c(s) &= \frac{\phi_B(s)}{\left(s^2 \frac{l m_B}{g m} + 1 \right)}; & \theta_c(s) &= \frac{\theta_B(s)}{\left(s^2 \frac{l m_B}{g m} + 1 \right)} \end{aligned}$$

donde, para todas las variables dependientes del tiempo se ha realizado la abreviación $f(s) = \mathcal{L}[f^\delta(t)]$.

A.2.2 Coordenadas de la carga

Por su parte, el vector de coordenadas generalizadas linealizado en coordenadas de la carga y sus derivadas, en 3D y considerando únicamente las variables de interés, quedan:

$$\mathbf{q}^\delta = [x_c^\delta, y_c^\delta, z_c^\delta, \phi_c^\delta, \theta_c^\delta, \phi_B^\delta, \theta_B^\delta]^\top$$

$$\dot{\mathbf{q}}^\delta = [\dot{x}_c^\delta, \dot{y}_c^\delta, \dot{z}_c^\delta, \dot{\phi}_c^\delta, \dot{\theta}_c^\delta, \dot{\phi}_B^\delta, \dot{\theta}_B^\delta]^\top$$

$$\ddot{\mathbf{q}}^\delta = [\ddot{x}_c^\delta, \ddot{y}_c^\delta, \ddot{z}_c^\delta, \ddot{\phi}_c^\delta, \ddot{\theta}_c^\delta, \ddot{\phi}_B^\delta, \ddot{\theta}_B^\delta]^\top$$

Y las matrices de la dinámica linealizadas en coordenadas de la carga:

$$\mathbf{M}^\delta = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & l m_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & -l m_B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{(B)}I_B^{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{(B)}I_B^{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{(B)}I_B^{zz} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G}^\delta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g \phi_L^\delta \\ -g \theta_L^\delta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En cuanto a las correspondientes transformadas de *Laplace*, se procede de manera análoga al caso anterior, llegando a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} x_L(s) &= \frac{g \theta_B(s)}{s^2 \left(s^2 \frac{l m_B}{g m} + 1 \right)}; & y_L(s) &= \frac{-g \phi_B(s)}{s^2 \left(s^2 \frac{l m_B}{g m} + 1 \right)}; & z_L(s) &= \frac{f(s)}{m s^2} \\ \phi_B(s) &= \frac{{}^{(B)}\tau_{B,\hat{x}}(s)}{{}^{(B)}I_B^{xx} s^2}; & \theta_B(s) &= \frac{{}^{(B)}\tau_{B,\hat{y}}(s)}{{}^{(B)}I_B^{yy} s^2}; & \psi_B(s) &= \frac{{}^{(B)}\tau_{B,\hat{z}}(s)}{{}^{(B)}I_B^{zz} s^2} \\ \phi_L(s) &= \frac{\phi_B(s)}{\left(s^2 \frac{l m_B}{g m} + 1 \right)}; & \theta_L(s) &= \frac{\theta_B(s)}{\left(s^2 \frac{l m_B}{g m} + 1 \right)} \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] *Modelado, simulación y control de un quadrotor para transporte de carga colgante. Extensión al caso tridimensional.* García Campos, Octavio Alfredo.
- [2] Yaser Alothman, Minhuan Guo, and Dongbing Gu, *Using iterative lqr to control two quadrotors transporting a cable-suspended load*, IFAC-PapersOnLine **50** (2017), no. 1, 4324–4329.
- [3] Franz David Bähner, *Modeling, simulation and control of a quadrotor carrying a slung load*, Research report, Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática. Universidad de Sevilla, 2015.
- [4] Gary J Balas, John C Doyle, Keith Glover, Andy Packard, and Roy Smith, *μ -analysis and synthesis toolbox*, MUSYN Inc. and The MathWorks, Natick MA (1993).
- [5] Antonio Barrientos, *Fundamentos de robótica*, Tech. report, e-libro, Corp., 2007.
- [6] BBC, *Google wing drones approved for us home deliveries*, 2019.
- [7] Luigi Biagiotti and Claudio Melchiorri, *Trajectory planning for automatic machines and robots*, Springer Science & Business Media, 2008.
- [8] Samir Bouabdallah, *Design and control of quadrotors with application to autonomous flying*, Tech. report, Epfl, 2007.
- [9] Samir Bouabdallah, Pierpaolo Murrieri, and Roland Siegwart, *Design and control of an indoor micro quadrotor*, IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA'04. 2004, vol. 5, IEEE, 2004, pp. 4393–4398.
- [10] José Luis Soto Cano, *Desarrollo de controladores avanzados para el seguimiento de trayectorias de un helicóptero quadrotor*, Trabajo Fin de Grado, Escuela Técnica Superior de Ingeniería. Universidad de Sevilla, 2014.
- [11] Urs Christen, *Engineering aspects of h (infinity) control*, (1998).

- [12] Urs Christen and Hans P Geering, *Inverting and noninverting $h(\infty)$ controllers*, Systems & control letters **30** (1997), no. 1, 31–38.
- [13] Urs Christen, Hans E Musch, and Max Steiner, *Robust control of distillation columns: μ - vs $h(\infty)$ -synthesis*, Journal of Process Control **7** (1997), no. 1, 19–30.
- [14] Shicong Dai, Taeyoung Lee, and Dennis S Bernstein, *Adaptive control of a quadrotor uav transporting a cable-suspended load with unknown mass*, 53rd IEEE Conference on Decision and Control, IEEE, 2014, pp. 6149–6154.
- [15] Dario Floreano and Robert J Wood, *Science, technology and the future of small autonomous drones*, Nature **521** (2015), no. 7553, 460.
- [16] Manuel Gil Ortega Francisco Rodríguez Rubio, *Robust control with applications in ship steering autopilots and solar power plant*, Control Robusto, vol. 4, Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática. Universidad de Sevilla, 2016.
- [17] Felipe Gonzalez, Alexander Heckmann, Stefan Notter, Markus Zürn, Jan Trachte, and Aaron McFadyen, *Non-linear model predictive control for uavs with slung/swung load*, (2015).
- [18] Da-Wei Gu, Petko Petkov, and Mihail M Konstantinov, *Robust control design with matlab®*, Springer Science & Business Media, 2005.
- [19] R Praveen Kumar Jain, *Transportation of cable suspended load using unmanned aerial vehicles: A real-time model predictive control approach*, (2015).
- [20] Christopher Korpela, Matko Orsag, Miles Pekala, and Paul Oh, *Dynamic stability of a mobile manipulating unmanned aerial vehicle*, 2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation, IEEE, 2013, pp. 4922–4927.
- [21] Prasanth Kotaru, Guofan Wu, and Koushil Sreenath, *Dynamics and control of a quadrotor with a payload suspended through an elastic cable*, 2017 American Control Conference (ACC), IEEE, 2017, pp. 3906–3913.
- [22] ———, *Differential-flatness and control of quadrotor (s) with a payload suspended through flexible cable (s)*, 2018 Indian Control Conference (ICC), IEEE, 2018, pp. 352–357.
- [23] Kerry Lacanette, *A basic introduction to filters-active, passive, and switched-capacitor*, National Semiconductor Corporation, <http://www.swarthmore.edu/NatSci/echeevel/Ref/DataSheet/Inttofilters.pdf>, (Apr. 1991) **22** (1991).
- [24] Taeyoung Lee, *Geometric control of multiple quadrotor uavs transporting a cable-suspended rigid body*, 53rd IEEE Conference on Decision and Control, IEEE, 2014, pp. 6155–6160.
- [25] Taeyoung Lee, Koushil Sreenath, and Vijay Kumar, *Geometric control of cooperating multiple quadrotor uavs with a suspended payload*, 52nd IEEE Conference on Decision and Control, IEEE, 2013, pp. 5510–5515.

-
- [26] José María Maestre, *Estructuras avanzadas de control*, Ampliación de Control, vol. 2, Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática. Universidad de Sevilla, 2016.
- [27] Vicente Mata, *Cinemática del sólido rígido*, Mecánica, vol. 3, Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales. Universidad Politécnica de Valencia, 2008.
- [28] ———, *Ecuaciones de Newton-Euler*, Mecánica, vol. 6, Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales. Universidad Politécnica de Valencia, 2008.
- [29] ———, *Ecuaciones de Lagrange-Euler*, Mecánica II, vol. 3, Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales. Universidad Politécnica de Valencia, 2009.
- [30] RM Murray, *Lecture 2—lqr control*, CALIFORNIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY Control and Dynamical Systems, California (2006).
- [31] Yishay Nezer, *Active notch filters*, *Wireless World* **81** (1975), no. 1475, 307–311.
- [32] Miguel Ángel Ridao Carlini, *Modelos matemáticos*, Modelado y Simulación, vol. 2, Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática. Universidad de Sevilla, 2016.
- [33] Kenzo Nonami, Farid Kendoul, Satoshi Suzuki, Wei Wang, and Daisuke Nakazawa, *Autonomous flying robots: unmanned aerial vehicles and micro aerial vehicles*, Springer Science & Business Media, 2010.
- [34] Katsuhiko Ogata, *Ingeniería de control moderna*, Pearson Educación, 2010.
- [35] Manuel Gil Ortega, *Control cinemático*, Control y programación de robots, vol. 2, Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática. Universidad de Sevilla, 2015.
- [36] ———, *Introducción al control robusto*, Control Robusto, vol. 1, Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática. Universidad de Sevilla, 2016.
- [37] MG Ortega, F Castaño, M Vargas, and FR Rubio, *Multivariable robust control of a rotary dryer: Analysis and design*, *Control Engineering Practice* **15** (2007), no. 4, 487–500.
- [38] Ivana Palunko, Aleksandra Faust, Patricio Cruz, Lydia Tapia, and Rafael Fierro, *A reinforcement learning approach towards autonomous suspended load manipulation using aerial robots*, 2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation, IEEE, 2013, pp. 4896–4901.
- [39] Guilherme V Raffo and Marcelino M de Almeida, *Nonlinear robust control of a quadrotor uav for load transportation with swing improvement*, 2016 American Control Conference (ACC), IEEE, 2016, pp. 3156–3162.
- [40] Guilherme V Raffo, Manuel G Ortega, Vicente Madero, and Francisco R Rubio, *Two-wheeled self-balanced pendulum workspace improvement via underactuated robust nonlinear control*, *Control Engineering Practice* **44** (2015), 231–242.
- [41] Brenner S Rego and Guilherme V Raffo, *Suspended load path tracking by a tilt-rotor uav*, *IFAC-PapersOnLine* **49** (2016), no. 32, 234–239.

- [42] ———, *Suspended load path tracking control based on zonotopic state estimation using a tilt-rotor uav*, 2016 IEEE 19th International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC), IEEE, 2016, pp. 1445–1451.
- [43] ———, *Suspended load path tracking control using a tilt-rotor uav based on zonotopic state estimation*, Journal of the Franklin Institute **356** (2019), no. 4, 1695–1729.
- [44] Brenner S Rego, Davide M Raimondo, and Guilherme V Raffo, *Path tracking control with state estimation based on constrained zonotopes for aerial load transportation*, 2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC), IEEE, 2018, pp. 1979–1984.
- [45] MA Santos, BS Rego, GV Raffo, and A Ferramosca, *Suspended load path tracking control strategy using a tilt-rotor uav*, Journal of Advanced Transportation **2017** (2017).
- [46] Peter Schmidt and Thomas Rehm, *Notch filter tuning for resonant frequency reduction in dual inertia systems*, Conference Record of the 1999 IEEE Industry Applications Conference. Thirty-Forth IAS Annual Meeting (Cat. No. 99CH36370), vol. 3, IEEE, 1999, pp. 1730–1734.
- [47] Sigurd Skogestad and Ian Postlethwaite, *Multivariable feedback control: analysis and design*, vol. 2, Wiley New York, 2007.
- [48] Koushil Sreenath, Taeyoung Lee, and Vijay Kumar, *Geometric control and differential flatness of a quadrotor uav with a cable-suspended load*, 52nd IEEE Conference on Decision and Control, IEEE, 2013, pp. 2269–2274.
- [49] Koushil Sreenath, Nathan Michael, and Vijay Kumar, *Trajectory generation and control of a quadrotor with a cable-suspended load-a differentially-flat hybrid system*, 2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation, IEEE, 2013, pp. 4888–4895.
- [50] Sarah Tang, Valentin Wüest, and Vijay Kumar, *Aggressive flight with suspended payloads using vision-based control*, IEEE Robotics and Automation Letters **3** (2018), no. 2, 1152–1159.
- [51] Oliver Tanner and Hans P Geering, *Two-degree-of-freedom robust controller for an autonomous helicopter*, Proceedings of the American Control Conference, vol. 2, 2003, pp. 993–998.
- [52] Manuel Gil Ortega, *Diseño analítico de controladores*, Fundamentos de Control Automático, vol. 8, Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática. Universidad de Sevilla, 2015.
- [53] ———, *Diseño frecuencial de controladores*, Fundamentos de Control Automático, vol. 9, Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática. Universidad de Sevilla, 2015.
- [54] Guofan Wu and Koushil Sreenath, *Geometric control of multiple quadrotors transporting a rigid-body load*, 53rd IEEE Conference on Decision and Control, IEEE, 2014, pp. 6141–6148.
- [55] Markus Zörn, Kye Morton, Alexander Heckmann, Aaron McFadyen, Stefan Notter, and Felipe Gonzalez, *Mpc controlled multirotor with suspended slung load: System architecture and visual load detection*, 2016 IEEE Aerospace conference, IEEE, 2016, pp. 1–11.